PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 18. 15. September 1918. 19. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 20 am 6. September 1918.

INHALT:

Wilhelm Feddersen †. S. 305.

Originalmitteilungen:

F. Reiche, Zur Quantelung des asymmetrischen Kreisels. S. 304.

H. Schmidt, Zur Theorie der Triboluminescenz. S. 309.

R. Ambronn, Über die elektrische Leitfähigkeit von Natron-Kalk-Silikat-Gläsern. S. 401.

C. Schaefer, Zur Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome Koördinaten. II. S. 406.

O. Grotrian, Eine Zahlenbeziehung zwischen drei Ordinaten der Hysteresisschleife. S. 408.

J. Bender †, Über die kritische Temperatur des Quecksilbers. S. 410.

Besprechungen:

W. Schüle, Technische Thermodynamik. I. S. 415.

J. Krauß, Grundzüge der maritimen Meteorologie und Ozeanographie. S. 415.

W. Schweydar, Die Bewegung der Drehachse der elastischen Erde im Erdkörper. S. 415.

O. Große, 40 Jahre Fernsprecher (Stephan-Siemens-Rathenau). S. 416.

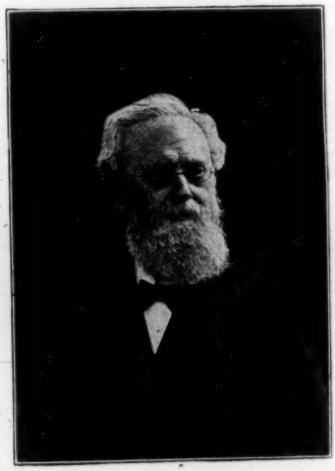
Tagesereignisse. S. 416.

Personalien. S. 416.

Angebote. S. 416.

Wilhelm Feddersen †.

Am 2. Juli starb in seinem 87. Lebensjahre der Altmeister der Leipziger Physik, Geheimer Hofrat Dr. Berend Wilhelm Feddersen, Mitglied der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mit ihm ist ein Privatgelehrter aus dem Leben geschieden von einer Art und Bedeutung, wie sich deren Deutschland nur weniger zu erfreuen hat.



W. Feddersen

Seine berühmten, mustergültigen Arbeiten über den elektrischen Funken und die Entladung der Leidener Flasche liegen ein halbes Jahrhundert zurück. Die Methoden und die Resultate, auf denen dann Hertz weiter bauen und schließlich die drahtlose Telegraphie erwachsen konnte, sind frühzeitig in die Lehrbücher übergegangen und Gemeingut geworden. Die Originalapparate, Verbindung von rotierendem Spiegel und photographischer Platte, befinden sich im Deutschen Museum zu München. Die Abhandlungen selbst haben in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften einen Neudruck erfahren. (Nr. 166.)

Am 26. März 1832 in der damals dänischen Stadt Schleswig geboren, besuchte Feddersen das Gymnasium zu Gotha. Seine hervorragendsten akademischen Lehrer waren Wilhelm Weber, Dove, Dirichlet, Magnus, Karsten und Hankel. Des letzteren mathematisch-elektrische Vorlesungen zogen ihn 1858 nach Leipzig, wo er dauernd wohnen geblieben ist, und wo bis 1866 auch das Hauptwerk seines Lebens geleistet wurde.

Seitdem haben ihn, abgesehen von einer unabgeschlossenen Arbeit über von ihm sogenannte Thermodiffusion in Gasen aus den siebziger Jahren, äußere Verhältnisse am Weiterexperimentieren gehindert und mehr auf humanitäre Tätigkeit gelenkt, die ihn in den Kriegsjahren auch zu regem Verkehr mit Soldaten im Felde geführt hat.

Daneben verfolgte er aber die Fortschritte der Physik mit stetem Interesse. Besondere Freude machte es ihm, als die Funkentelegraphie zu Wellen der von ihm studierten Frequenzen zurückkehrte. Bis weit in das achte Jahrzehnt seines Lebens nahm er als regelmäßiger Gast am wöchentlichen Kolloquium des Physikalischen Instituts der Universität teil und war dem jungen Geschlecht ein schönes Vorbild von prächtigem Idealismus.

Besondere Verdienste hat sich Feddersen endlich um Poggendorffs biographisch-literarisches Wörterbuch erworben: Zunächst durch eigne Arbeit an der Fortsetzung und durch Gewinnung neuer Kräfte für die Weiterführung, dann aber durch eine gemeinsam mit seiner Frau gemachte Stiftung von 100000 M., um das segensreiche Unternehmen, für das sich inzwischen auch die kartellierten Deutschen Akademien eingesetzt hatten, für die Zukunft sicher zu stellen.

Das beigefügte Bild, das Feddersens bis in die letzten Tage auffallend feine Züge nur unvollkommen wiedergibt, stammt aus dem Jahre 1902.

Th. Des Coudres.

(Eingegangen 5. August 1918.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Quantelung des asymmetrischen Kreisels.

Von F. Reiche.

In einer Diskussion, die sich an die Göttinger Wolfskehl-Vorträge von Max Planck über die Grundlagen der Quantentheorie anschloß, erwähnte Herr M. v. Laue, daß das Problem der Bewegung des asymmetrischen Kreisels sich, nach einer Abhandlung von Kolossoff[1]), durch Separation der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung lösen lasse. Diese Tatsache ist in Fachkreisen offenbar wenig bekannt; so bezeichnet auch Epstein[2]), in seiner Arbeit über die spezifische Wärme des Wasserstoffs, die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung des asymmetrischen Kreisels als nicht separierbar.

Da das Problem der Quantelung des asymmetrischen Kreisels und der Grenzübergang zum symmetrischen Kreisel von Wichtigkeit ist, vor allem wegen der Anwendung auf den Wasserstoff, so sei es gestattet, hier die Methode von Kolossoff etwas ausführlicher als in der Originalarbeit darzustellen und gleich die Quantelung der Kreiselbewegung anzuschließen.

Dabei zeigt es sich allerdings, daß man, jedenfalls in den von Kolossoff verwendeten Koordinaten, die Hamilton-Jacobische Gleichung des asymmetrischen Kreisels nicht in voller Allgemeinheit separieren kann. Vielmehr gelingt die Separation nur dann, wenn der konstante Impuls, der zum Präzessionswinkel ψ des Kreisels gehört, gleich null ist. Dies bedingt naturgemäß eine Einschränkung des Problems, die sich bei der Quantelung darin äußert, daß die eine der drei Quantenzahlen gleich null gesetzt ist.

Von Interesse dürfte noch der Umstand sein, daß man beim Grenzübergang zum symmetrischen Kreisel zu der Schwarzschild-Epsteinschen Formel für die gequantelte Energie gelangt, die sich von der Planckschen Formel wesentlich unterscheidet.

§ 1.

Der starre Körper mit den drei ungleichen Hauptträgheitsmomenten $A < B < C$ sei kräftefrei um einen festen Punkt drehbar. Seine Lage sei durch die drei Eulerschen Winkel ϑ, ψ, φ in folgender Weise charakterisiert: ist $x\,y\,z$ das im Körper feste, mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallende Koordinatensystem, $\xi\,\eta\,\zeta$ das im Raum feste Koordinatensystem, so ist ϑ (der „Neigungswinkel") $= \sphericalangle(z, \zeta)$. Die Schnittlinie der beweglichen $x\,y$-Ebene mit der festen $\xi\,\eta$-Ebene ist die „Knotenlinie". ψ (der „Präzessionswinkel") ist dann der Winkel zwischen Knotenlinie und ξ-Achse, φ (der „Eigendrehungswinkel") ist der Winkel zwischen Knotenlinie und x-Achse. (Siehe Fig. 1.)

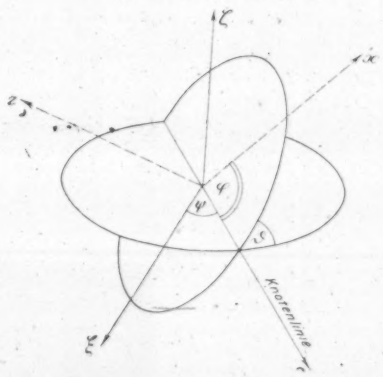


Fig. 1.

Sind p, q, r die Drehungskomponenten des Körpers bezogen auf das System $x\,y\,z$, so ist seine kinetische Energie bekanntlich:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \tag{1}$$

Dabei hängen p, q, r mit ϑ, ψ, φ in folgender Weise zusammen[1]):

$$\begin{cases} p = \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi \\ q = \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi \\ r = \dot{\psi}\cos\vartheta \qquad\quad + \dot{\varphi}. \end{cases} \tag{2}$$

Löst man nach $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$ auf, so folgt

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi \\ \dot{\psi} = \dfrac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\vartheta} \\ \dot{\varphi} = r - \operatorname{ctg}\vartheta\,(p\sin\varphi + q\cos\varphi) \end{cases} \tag{2a}$$

Setzt man die Ausdrücke (2) in (1) ein, und bildet die zu ϑ, ψ, φ gehörigen Impulse $p_\vartheta, p_\psi, p_\varphi$, so folgt:

$$\begin{cases} p_\vartheta = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = Ap\cos\varphi - Bq\sin\varphi \\ p_\psi = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = Ap\sin\vartheta\sin\varphi + Bq\sin\vartheta\cos\varphi + \\ \qquad\qquad + Cr\cos\vartheta \\ p_\varphi = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = Cr \end{cases} \tag{3}$$

1) Mathem. Ann. **60**, 232, 1905. Herr v. Laue hatte die Freundlichkeit, dem Verf. diese Literaturstelle mitzuteilen.
2) Verh. d. Phys. Ges. **18**, 398, 1916.

1) Vgl. z. B. Gans u. Weber, Repertorium d. Physik Bd. I, S. 58.

Löst man diese Gleichungen nach p, q, r auf, setzt die erhaltenen Werte in (1) ein, und schreibt $\frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \frac{\partial V}{\partial \psi}, \frac{\partial V}{\partial \varphi}$ an Stelle von p_ϑ, p_ψ, p_φ, so gewinnt man sofort die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für die kräftefreie Bewegung des starren Körpers. Sie lautet:

$$\frac{1}{A\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\sin\varphi+\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\sin\vartheta\cos\varphi-\frac{\partial V}{\partial \varphi}\cos\vartheta\sin\varphi\right)^2+\frac{1}{B\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\cos\varphi-\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\sin\vartheta\sin\varphi-\frac{\partial V}{\partial \varphi}\cos\vartheta\cos\varphi\right)^2+\frac{1}{C}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2=2T. \tag{4}$$

Da in dieser Differentialgleichung ψ nicht selbst vorkommt, so kann man bekanntlich setzen

$$V=\beta\cdot\psi+V'(\vartheta,\varphi), \tag{5}$$

wo β eine Konstante ist. Und zwar ist

$$\beta=\frac{\partial V}{\partial \psi}=p_\psi. \tag{6}$$

Setzt man (6) in (4) ein, so reduziert sich dadurch die Hamilton-Jacobische Gleichung auf eine partielle Differentialgleichung für zwei Variable ϑ und φ. Im allgemeinen Falle, wo A, B, C voneinander verschieden sind, gelingt indessen die Separation dieser Differentialgleichung in den gewählten Koordinaten nicht. Durch Einführung neuer Variablen kann man jedoch, wie Kolossoff gezeigt hat, — unter einer gewissen Einschränkung — die Differentialgleichung auf eine separierbare Form bringen.

§ 2.

Dazu führe man zuerst die Hilfsvariablen u, v, w ein durch die Beziehungen

$$\begin{cases} u=\frac{1}{\sqrt{A}}\sin\vartheta\sin\varphi \\ v=\frac{1}{\sqrt{B}}\sin\vartheta\cos\varphi \\ w=\frac{1}{\sqrt{C}}\cos\vartheta \end{cases} \tag{7}$$

Diese drei Hilfsvariablen sind nicht voneinander unabhängig, sondern erfüllen die Gleichung:

$$Au^2+Bv^2+Cw^2=1. \tag{8}$$

Es sind also durch die Gleichungen (7) und (8) an Stelle von ϑ und φ zwei neue unabhängige Variable eingeführt.

Aus (7) folgt durch Differentiation nach der Zeit und Benutzung von (2a)

$$\begin{cases} \sqrt{A}\cdot\dot{u}=-q\cos\vartheta+r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sqrt{B}\cdot\dot{v}=\ \ p\cos\vartheta-r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sqrt{C}\cdot\dot{w}=-\sin\vartheta\,(p\cos\varphi-q\sin\varphi). \end{cases} \tag{9}$$

Jetzt bilde man den Ausdruck:

$$\beta^2+ABC(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2),$$

indem man für $\beta=p_\psi$ den in (3) stehenden Ausdruck einsetzt. Dann folgt

$$\beta^2+ABC(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2)=(Ap^2+Bq^2+Cr^2)(A\sin^2\vartheta\sin^2\varphi+B\sin^2\vartheta\cos^2\varphi+C\cos^2\vartheta)=2T(A^2u^2+B^2v^2+C^2w^2).$$

Also

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{\beta^2+ABC(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2)}{A^2u^2+B^2v^2+C^2w^2}. \tag{10}$$

Jetzt führe man an Stelle der Hilfsvariablen u, v, w elliptische Koordinaten auf der Oberfläche des Ellipsoids (8) ein. Dies geschieht folgendermaßen: Wir setzen

$$\begin{cases} A=\frac{1}{a^2};\ B=\frac{1}{b^2};\ C=\frac{1}{c^2} \\ \text{wo also } a>b>c \end{cases} \tag{11}$$

und nennen $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$ die drei Wurzeln der in λ kubischen Gleichung

$$\frac{u^2}{a^2+\lambda}+\frac{v^2}{b^2+\lambda}+\frac{w^2}{c^2+\lambda}=1. \tag{12}$$

Dann ist

$$(-a^2)<\lambda_3<(-b^2)\leqq\lambda_2\leqq(-c^2)\leqq\lambda_1 \tag{13}$$

und die Fläche $\lambda_1=0$ ist das betrachtete Ellipsoid (8).

Ferner ist bekanntlich

$$\begin{cases} u^2=\frac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)} \\ v^2=\frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)} \\ w^2=\frac{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3)}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)} \end{cases} \tag{14}$$

und

$$\begin{cases} \dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2=\frac{1}{4}(L\dot{\lambda}_1^2+M\dot{\lambda}_2^2+N\dot{\lambda}_3^2), \\ \text{wo} \\ L=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)} \\ M=\frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)}{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)} \\ N=\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a^2+\lambda_3)(b^2+\lambda_3)(c^2+\lambda_3)} \end{cases} \tag{15}$$

Endlich ist

$$A^2u^2+B^2v^2+C^2w^2=\frac{\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1}{a^2b^2c^2}-\frac{a^4b^4(a^2-b^2)+b^4c^4(b^2-c^2)+c^4a^4(c^2-a^2)}{a^4b^4c^4(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}\cdot\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \tag{16}$$

Setzt man jetzt $\lambda_1 = 0$, betrachtet also nur Punkte auf dem Ellipsoid (8), so wird

$$\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 = \frac{1}{4}(M\dot{\lambda}_2^2 + N\dot{\lambda}_3^2), \quad (17)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{(\lambda_2-\lambda_3)\lambda_2}{f(\lambda_2)}; \quad N = \frac{(\lambda_3-\lambda_2)\lambda_3}{f(\lambda_3)} \\ \text{und} \quad f(\lambda) &= (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda). \end{aligned}\right\} \quad (17a)$$

Ferner

$$A^2u^2 + B^2v^2 + C^2w^2 = \frac{\lambda_2\lambda_3}{a^2b^2c^2} = ABC\,\lambda_2\lambda_3. \quad (18)$$

Daher nach (10):

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{\beta^2 + \frac{1}{4}ABC(M\dot{\lambda}_2^2 + N\dot{\lambda}_3^2)}{ABC\cdot\lambda_2\lambda_3}$$

Also werden die Impulse p_{λ_2} und p_{λ_3}:

$$p_{\lambda_2} = \frac{\partial T}{\partial\dot{\lambda}_2} = \frac{1}{4}M\dot{\lambda}_2; \quad p_{\lambda_3} = \frac{\partial T}{\partial\dot{\lambda}_3} = \frac{1}{4}N\dot{\lambda}_3$$

und daher die Hamilton-Jacobische Gleichung, wenn man $\frac{\partial V}{\partial\lambda_2}$ und $\frac{\partial V}{\partial\lambda_3}$ für p_{λ_2} und p_{λ_3} schreibt:

$$2T = \frac{1}{ABC\,\lambda_2\lambda_3}\left\{\beta^2 + 4ABC\,\lambda_2^2\lambda_3^2\left[\frac{f(\lambda_2)}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_3)}\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda_2}\right)^2 + \frac{f(\lambda_3)}{\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2)}\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda_3}\right)^2\right]\right\}$$

oder:

$$\frac{f(\lambda_2)}{\lambda_2}\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda_2}\right)^2 - \frac{f(\lambda_3)}{\lambda_3}\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda_3}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4ABC}\,\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2^2\lambda_3^2} = \frac{T}{2}\left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2}\right). \quad (19)$$

Diese Differentialgleichung ist ersichtlich nur dann separierbar, wenn $\beta = 0$ ist. Der konstante Impuls p_ψ, der die Komponente des Gesamtimpulses in Richtung der ζ-Achse darstellt, muß also dauernd gleich null sein, mit anderen Worten: der Impuls des starren Körpers muß in der festen Äquatorebene (ξ-η-Ebene) liegen. Diese Einschränkung liegt den folgenden Betrachtungen zugrunde.

§ 3.

Wir machen jetzt also die Annahme

$$p_\psi = \beta = 0. \quad (20)$$

Dann läßt sich (19) separieren:

$$V = V_2(\lambda_2) + V_3(\lambda_3) \quad (21)$$

wo für V_2 und V_3 die gewöhnlichen Differentialgleichungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{f(\lambda_2)}{\lambda_2}\left(\frac{dV_2}{d\lambda_2}\right)^2 + \frac{T}{2\lambda_2} &= \frac{k}{2}, \\ \frac{f(\lambda_3)}{\lambda_3}\left(\frac{dV_3}{d\lambda_3}\right)^2 + \frac{T}{2\lambda_3} &= \frac{k}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Dabei ist k eine neu eingeführte Konstante. Also

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{\lambda_2 k - T}\,d\lambda_2}{\sqrt{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}} + \text{const.} \\ V_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{\lambda_3 k - T}\,d\lambda_3}{\sqrt{(a^2+\lambda_3)(b^2+\lambda_3)(c^2+\lambda_3)}} + \text{const.} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Nun ist nach (13)

$$a^2 + \lambda_3 > 0; \quad b^2 + \lambda_3 < 0; \quad c^2 + \lambda_3 < 0.$$

Daher muß in V_3:

$$\lambda_3 k - T > 0$$

sein. Da nun λ_3 negativ ist, so folgt:

$$k < 0. \quad (24)$$

Setzt man

$$\lambda_3 = -\lambda_3'; \quad k = -k'; \quad \frac{T}{k'} = f', \quad (24a)$$

so folgt:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_3' > f' \\ &b^2 \leqq \lambda_3' < a^2. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Es liegt also, auf einer λ'-Achse aufgetragen, f' unterhalb a^2. Andererseits ist nach (13):

$$a^2 + \lambda_2 > 0; \quad b^2 + \lambda_2 > 0; \quad c^2 + \lambda_2 < 0.$$

Also muß in V_2:

$$\lambda_2 k - T < 0$$

sein. Setzt man, analog wie oben

$$\lambda_2 = -\lambda_2', \quad (24b)$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_2' < f' \\ &c^2 \leqq \lambda_2' < b^2. \end{aligned}\right\} \quad (25a)$$

Es liegt also, auf der λ'-Achse, f' oberhalb c^2. Hieraus und aus dem oben abgeleiteten Resultat folgt, daß f' zwischen c^2 und a^2 liegt:

$$c^2 \leqq f' < a^2. \quad (26)$$

Da wir später zum Grenzfall des symmetrischen Kreisels übergehen werden, indem wir $A = B$ setzen, also a^2 mit b^2 zusammenfallen lassen, so wollen wir f' zwischen c^2 und b^2 liegend annehmen.

§ 4.

Wir stellen jetzt in bekannter Weise die Quantenbedingungen auf. Diese sind hier nach (23)

$$\left.\begin{aligned} [V_2] &= \frac{2}{\sqrt{2}}\oint\frac{\sqrt{\lambda_2 k - T}\,d\lambda_2}{\sqrt{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}} = n_2 h \\ [V_3] &= \frac{2}{\sqrt{2}}\oint\frac{\sqrt{\lambda_3 k - T}\,d\lambda_3}{\sqrt{(a^2+\lambda_3)(b^2+\lambda_3)(c^2+\lambda_3)}} = n_3 h \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Dabei sind die Integrationen über den vollen Wertbereich der Variablen zu erstrecken; n_2 und n_3 sind ganze Zahlen, h ist die Planck-sche Konstante. Der Faktor 2 vor den Integralen rührt von dem Umstand her, daß nach (14) der Zustand durch die Variablen λ_2 und λ_3 nicht eindeutig, sondern zweideutig bestimmt wird.

Wir behandeln erst das Integral nach λ_2 und schreiben es so:

$$[V_2] = \sqrt{2k} \oint \frac{(f' - \lambda_2')\, d\lambda_2'}{\sqrt{(a^2 - \lambda_2')(b^2 - \lambda_2')(\lambda_2' - c^2)(f' - \lambda_2')}}. \tag{28}$$

Da λ_2' auf das Intervall zwischen c^2 und f' beschränkt ist, so ist der Integrationsweg ein

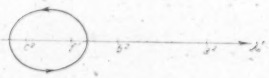


Fig. 2.

positiver Umlauf um die Verzweigungspunkte c^2 und f' (siehe Fig. 2). Setzt man

$$\lambda_2' = \frac{c^2(f' - a^2) - a^2(f' - c^2)\sin^2\chi}{(f' - a^2) - (f' - c^2)\sin^2\chi}$$

und

$$\varkappa^2 = \frac{(f' - c^2)(a^2 - b^2)}{(b^2 - c^2)(a^2 - f')} < 1\,; \quad n = \frac{f' - c^2}{a^2 - f'}, \tag{29}$$

so folgt

$$[V_2] = 4\sqrt{2k'} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - f'}{b^2 - c^2}} \left\{ \frac{a^2 - c^2}{a^2 - f'} \cdot \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, \varkappa\right) - K(\varkappa) \right\}. \tag{30}$$

Dabei ist

$$K(\varkappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\chi}}$$

das vollständige elliptische Integral erster Gattung,

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, \varkappa\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{(1 + n\sin^2\chi)\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\chi}}$$

das vollständige elliptische Integral dritter Gattung.

Ganz analog behandeln wir $[V_3]$. Wir schreiben:

$$[V_3] = \sqrt{2k'} \oint \frac{(\lambda_3' - f')\, d\lambda_3'}{\sqrt{(a^2 - \lambda_3')(\lambda_3' - b^2)(\lambda_3' - c^2)(\lambda_3' - f')}}. \tag{31}$$

Der Integrationsweg ist hier ein Umlauf um die Verzweigungspunkte b^2 und a^2 (Fig. 3). Wir setzen hier

$$\lambda_3' = \frac{b^2(a^2 - f') - f'(a^2 - b^2)\sin^2\chi}{(a^2 - f') - (a^2 - b^2)\sin^2\chi}\,; \; m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - f'}. \tag{32}$$

Fig. 3.

Dann folgt

$$[V_3] = 4\sqrt{2k'} \cdot \frac{b^2 - f'}{\sqrt{(b^2 - c^2)(a^2 - f')}} \cdot \Pi\left(\frac{\pi}{2}, -m, \varkappa\right). \tag{33}$$

Die Gleichung (30) läßt sich noch transformieren durch Anwendung der Formel[1]):

$$\left| \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, \varkappa\right) = -\frac{(1-\varkappa^2)\sin^2\beta}{1+n} \cdot \Pi\left|\frac{\pi}{2}, -(\cos^2\beta + \varkappa^2\sin^2\beta), \varkappa\right| + \frac{K(\varkappa)}{1+n} + \frac{\pi}{2}\frac{\sin\beta}{\sqrt{1+n}}, \right.$$

wo

$$n = \varkappa^2 \operatorname{tg}^2\beta .$$

Dann folgt nach kurzer Zwischenrechnung

$$[V_2] = 2\pi\sqrt{2k'} - [V_3] \qquad (34)$$

oder

$$\sqrt{2k'} = \frac{(n_2 + n_3)h}{2\pi} . \qquad (35)$$

Aus (33) folgt dann, mit Benutzung von (35)

$$\frac{b^2 - f'}{\sqrt{(b^2-c^2)(a^2-f')}} \cdot \Pi\left(\frac{\pi}{2}, -m, \varkappa\right) = \frac{n_3\pi}{2(n_2+n_3)} . \qquad (36)$$

Die dritte Quantenbedingung ist hier speziell

$$\int_0^{2\pi} p_\psi \, d\psi = 2\pi\beta = n_1 h = 0, \qquad (37)$$

d. h.: die Quantenzahl n_1 ist gleich null. Das ist die Bedingung, die die Allgemeinheit des Problems einschränkt.

§ 5.

Um die Energie T des Körpers als Funktion der Quantenzahlen zu erhalten, müßte man (36) nach T, also nach f', auflösen. Dies ist jedoch allgemein nicht möglich, da f' sowohl in m wie auch in $\varkappa$ enthalten ist. Dagegen lassen sich für T leicht Näherungsformeln aufstellen, wenn zwei Trägheitsmomente (A und B) nahezu einander gleich sind. Wir setzen also

$$a^2 - b^2 = \varepsilon^2, \text{ wo } \varepsilon^2 \ll a^2 \qquad (38)$$

und entwickeln bis zu Gliedern von der Ordnung ε^2. Dann wird

$$\frac{b^2 - f'}{\sqrt{(b^2-c^2)(a^2-f')}} = \sqrt{\frac{a^2-f'}{a^2-c^2}}\left\{1 + \varepsilon^2\left[\frac{1}{2(a^2-c^2)} - \frac{1}{a^2-f'}\right]\right\}$$

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -m, \varkappa\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{(1+m\sin^2\chi)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\chi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\chi\left\{1 + \left(\frac{\varkappa^2}{2} + m\right)\sin^2\chi\right\} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\frac{\varkappa^2}{2}+m}{2}\right).$$

Dabei sind

$$m = \frac{\varepsilon^2}{a^2 - f'}; \quad \varkappa^2 = \frac{(f'-c^2)\varepsilon^2}{(a^2-f')(a^2-c^2)} .$$

Also wird

$$\frac{b^2 - f'}{\sqrt{(b^2-c^2)(a^2-f')}} \cdot \Pi\left(\frac{\pi}{2}, -m, \varkappa\right) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a^2-f'}{a^2-c^2}}\left\{1 - \frac{\varepsilon^2(f'-c^2)}{4(a^2-f')(a^2-c^2)}\right\}$$

und daher nach (36)

$$\sqrt{\frac{a^2-f'}{a^2-c^2}} - \frac{\varepsilon^2}{4}\cdot\frac{f'-c^2}{(a^2-c^2)\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-f')}} = \frac{n_3}{n_2+n_3} \qquad (39)$$

In erster Näherung, d. h. für $\varepsilon^2 = 0$, erhält man daraus

$$f' = a^2 - (a^2-c^2)\left(\frac{n_3}{n_2+n_3}\right)^2 . \qquad (40)$$

Die zweite Näherung erhält man, wenn man in dem Gliede mit ε^2 für f' den Näherungswert (40) einsetzt. Dann folgt nach kurzer Rechnung

$$f' = \frac{T}{k'} = a^2 - (a^2-c^2)\left(\frac{n_3}{n_2+n_3}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{(n_2+n_3)^2 - n_3^2}{(n_2+n_3)^2} . \qquad (41)$$

Unter Benutzung von (35) und (11) folgt daraus schließlich

$$T = \frac{h^2}{8\pi^2}\left\{\frac{(n_2+n_3)^2 - n_3^2}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) + \frac{n_3^2}{C}\right\} . \qquad (42)$$

Für den Grenzfall des symmetrischen Kreisels ($A = B$) folgt die von Schwarzschild[1]) und Epstein[2]) aufgestellte Formel

$$T = \frac{h^2}{8\pi^2}\left\{\frac{(n_2+n_3)^2 - n_3^2}{A} + \frac{n_3^2}{C}\right\}, \qquad (43)$$

die sich von dem von Planck[3]) abgeleiteten Ausdruck

$$T_P = \frac{h^2}{8\pi^2}\left\{\frac{n^2}{A} + \frac{n'^2}{C}\right\} \qquad (44)$$

in charakteristischer Weise unterscheidet.

1) Vgl. z. B. Láska, Formelsammlung S. 330 (Vieweg, 1888—94).

1) K. Schwarzschild, Ber. d. Berliner Akad. 1916, S. 548.
2) P. Epstein, Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 398, 1916.
3) M. Planck, Ann. d. Phys. **50**, 385, 1916.

Setzt man von vornherein $A = B$, so läßt sich die Hamilton-Jacobische Gleichung (4) vollständig separieren, und führt, wie Epstein zeigte, auf den Wert (43).

Berlin, Juni 1918.

(Eingegangen 10. Juni 1918.)

Zur Theorie der Triboluminescenz.

Von Harry Schmidt.

A. Imhof[1]) hat vor einiger Zeit eine Theorie der Triboluminescenz entwickelt, die sich in kurzer Zusammenfassung folgendermaßen wiedergeben läßt: „Spätestens während des Überganges in die feste Formart findet die Erregung der nachher triboluminescierenden Substanz in einen Zustand A höherer Energie statt. Diese nicht lichtelektrische Erregung besteht darin, daß Metallatome oder organische Atomgruppen Elektronen entweichen lassen, welche von benachbarten Metalloidatomen in stabilerer Weise, als dies bei der Phosphoreszenz angenommen wird, gebunden werden. In einer noch nicht genauer bekannten Funktion der Zeit kehren die Elektronen sukzessive zufolge der Wärmeschwingungen der Atome nach den Ausgangsatomen zurück, bei den einen Substanzen in ziemlich kurzer Zeit (temporäre Triboluminescenz), bei anderen nur in außerordentlich langsamer Folge. Durch mechanische Eingriffe (Brechen) werden in der Umgebung der Bruchflächen heftige Brucherschütterungen veranlaßt, welche einen plötzlichen Rücktritt vieler Elektronen zu den Ausgangsatomen bewirken. Indem diese nun Schwingungen isochroner Emissionselektronen erzwingen, wird das mit Triboluminescenz bezeichnete Leuchten erzeugt. Die Substanz im Zustand A geht dadurch über in den energieärmeren Zustand B."

Abgesehen davon, daß diese Theorie insofern unbefriedigend erscheinen muß, als sie auf jeden Versuch verzichtet, nähere Angaben über den Mechanismus der eigentlichen Triboluminescenzerregung zu machen, wie sie sich in dem Entweichen von Elektronen aus bestimmten Atomen während des Kristallisationsvorganges darstellen soll, lassen sich auch mancherlei Einwände gegen sie erheben. Zunächst dürfte es überhaupt kaum möglich sein, annehmbare Ursachen für dieses Entweichen von Elektronen zu finden. Aber selbst wenn das gelänge, so erhebt sich sofort eine wesentlich größere Schwierigkeit mit der Frage, welche Nachbaratome fähig sein könnten, die abgetrennten Elektronen mit größerer Stabilität zu binden, als dies bei der Phosphoreszenz der Fall ist. Denn wie aus den Untersuchungen über Phosphoreszenz bekannt ist, sind nur sehr wenige Atomgruppierungen imstande, eine verhältnismäßig langdauernde Aufspeicheruug von Elektronen zu ermöglichen, und alles, was wir vorläufig über die Struktur dieser Gruppierungen wissen, ist das, daß sie notwendig Sulfide oder Selenide enthalten müssen[1]). Da aber die Mehrzahl der triboluminescierenden Substanzen anderen Stoffklassen angehört, so muß die Annahme ihrer besonders großen Aufspeicherungsfähigkeit für Elektronen zum mindesten als eine sehr unwahrscheinliche bezeichnet werden.

In direkten Widerspruch mit der Erfahrung kommt aber die Imhofsche Theorie, wenn man den Einfluß der Temperatur sowie von roter und ultraroter Bestrahlung auf die Triboluminescenz berücksichtigt. Für den Temperatureinfluß hat Imhof[2]) selbst in einer früheren Arbeit wertvolles Material beigebracht. Wäre seine Theorie richtig, so müßte man erwarten, daß bei Erhöhung der Temperatur zunächst eine Zunahme der Lichtintensität einsetzt, indem durch die erhöhte allgemeine Molekularbewegung die Abgabe der aufgespeicherten Elektronen wesentlich beschleunigt wird. Bei genügender Dauer der Erwärmung müßte auf diese Weise alle aufgespeicherte Erregung zur Verausgabung gelangen, die Triboluminescenzfähigkeit also verloren gehen, ohne beim Abkühlen wiedererlangt zu werden. Die Erfahrung dagegen lehrt das folgende. Die Kurve, welche die Intensität der Triboluminescenz als Funktion der Temperatur darstellt, fällt im allgemeinen sehr langsam ab, um dann kurz vor dem Schmelzpunkt rasch gegen diesen zu auf Null zu sinken. Imhof gelang es, für das Zinksulfid diese Kurve angenähert experimentell zu ermitteln; seine Versuchsdaten sind in der nachstehenden Tabelle wiedergegeben.

Der Widerspruch zwischen Theorie und Erfahrung ist evident. Es findet nicht nur keine anfängliche Erhöhung der Luminescenzintensität statt, sondern bei abnehmender Temperatur nimmt diese Intensität sogar wieder zu, was doch nach der Theorie auf keinen Fall erwartet werden kann. Ferner schreibt Imhof: „Flußspat zeigt bekanntlich sehr schöne Fluoreszenz und Thermoluminescenz. Verschiedentlich wurde die Thermoluminescenz als Ursache seiner

1) A. Imhof, diese Zeitschr. 18, 374, 1917.

1) Auch Telluride dürften als Phosphoreszenzzentren in Frage kommen; eine diesbezügliche Untersuchung ist in Vorbereitung.

2) A. Imhof, diese Zeitschr. 18, 78, 1917.

Temperatur	Relative Lumineszenz-Intensität	Temperatur	Relative Lumineszenz-Intensität
18°	10,00	100°	3,35
37°	10,00	30°	10,00
66°	9,25	17°	11,81
110°	6,51	85°	5,21
120°	6,51	125°	5,21
140°	4,55	170°	1,43
178°	1,52	225°	0,10
205°	0,26	265°	0,07
220°	0,25	169°	1,57
183°	0,27	95°	5,40
170°	0,88	20°	10,08
160°	1,08		

Tribolumineszenz angesehen. Durch die Temperaturuntersuchungen ergab sich nun einwandfrei, daß es sich um zwei durchaus unabhängige Erscheinungen handelt. Erhitzt man Flußspat längere Zeit auf etwa 150°, so verliert er seine Thermolumineszenz, wie bekannt, fast gänzlich und erlangt diese Eigenschaft erst wieder durch neue Belichtung oder radioaktive Bestrahlung. Läßt man aber den lange erhitzten Kristall wieder erkalten, so zeigt er durchaus ungeschwächte Tribolumineszenz." Diese Bemerkungen sind unverständlich. Denn wie Lenard[1]) gezeigt hat, stellt die Wärme keine besondere Erregungsart dar, sondern die sogenannte Thermolumineszenz kommt lediglich dadurch zustande, daß aufgespeicherte Erregung zur beschleunigten Verausgabung gebracht wird. Warum aber die aufgespeicherte Erregung der Tribolumineszenz, die doch nach Imhofs Theorie genau dasselbe darstellt wie die der Phosphoreszenz, durch die Wärme in ganz anderer Weise beeinflußt werden soll, als die letztere, ist mir unklar. Vielmehr müßte man gerade auf Grund der Imhofschen Theorie zu dem Schluß geführt werden, daß alle tribolumineszierenden Substanzen bei der Erwärmung „Thermolumineszenz" zeigen.

Auch einige vorläufige Versuche, die ich über die Einwirkung von rotem und ultrarotem Licht auf die Tribolumineszenzfähigkeit vom Zinksulfid angestellt habe, sprechen gegen die Imhofsche Theorie. Es ist ja bekannt, daß gerade beim Zinksulfid die phosphoreszenzauslöschende Wirkung dieses Lichtes eine sehr auffallende ist. Wie Lenard[2]) gezeigt hat, ist jene Wirkung als verursacht durch molekularlokale Temperaturerhöhungen aufzufassen, wodurch dann (wie bei der unmittelbaren Erwärmung des ganzen Präparats) die aufgespeicherte Erregung unter wesentlicher Beschleunigung verausgabt wird. Man müßte also bei Bestrahlung mit rotem und ultrarotem Licht eine anfängliche Intensitätssteigerung der Tribolumineszenz erwarten, der dann bald eine völlige Vernichtung der Lumineszenzfähigkeit folgen müßte. Bis jetzt war es mir aber nicht möglich, überhaupt irgendeinen merklichen Einfluß solchen Lichtes aufzufinden.

Während also die von Imhof gegebene Theorie der Tribolumineszenz in mancher Hinsicht mit der Erfahrung im Widerspruch steht, dürfte dasselbe für eine andere Theorie nicht gelten, die Lenard[1]) vor einiger Zeit anmerkungsweise gelegentlich einer anderweitigen Untersuchung angedeutet hat. Diese Theorie soll daher im folgenden etwas näher ausgeführt werden.

Den Ausgangspunkt bildet dabei die Vorstellung, daß sich an Flüssigkeitsoberflächen elektrische Doppelschichten ausbilden. Es müssen nämlich die senkrecht zur Oberfläche gerichteten Molekularkräfte Verschiebungen der beweglichen Teile der einzelnen Moleküle nach innen zu entweder durch Drehungen oder durch innere Verzerrungen der Moleküle derart hervorbringen, daß dadurch die massiveren Teile der Moleküle dem Innern der Flüssigkeit genähert werden. Diese inneren Massenverschiebungen der an der Oberfläche gelegenen Moleküle müssen aber bei der elektrischen Konstitution der sie aufbauenden Atome und bei der elektrischen Natur der die Atome im Molekül zusammenhaltenden chemischen Kräfte gleichbedeutend sein mit elektrischen Verschiebungen in Richtung der Oberflächennormalen, d. h. mit der Herstellung einer elektrischen Doppelschicht an der Oberfläche. Die massiveren Teile der Atome sind nun, wie man weiß, mit ihrer positiven Ladung verknüpft, so daß man also die äußere Belegung der Doppelschicht als negativ geladen zu erwarten hätte. Die Beobachtungen über die Wasserfallelektrizität bestätigen diese Erwartungen aufs beste[2]). In Fortsetzung dieser Überlegungen wird man dann leicht dazu geführt, auch in Kristallen derartige Doppelschichten anzunehmen, die sich bei der Kristallbildung infolge der Molekularkräfte ausgebildet haben. Beim Zerbrechen der Kristalle müssen infolgedessen freie Ladungen auftreten, die sich durch eine in der Luft stattfindende Entladung ausgleichen. Ist dann die betreffende Substanz ihrer Natur nach dazu geeignet, durch diese Entladung (direkt oder indirekt) zur Lumineszenz erregt zu werden, so werden wir an ihr die Erscheinung der Tribolumineszenz wahr-

1) Vgl. z. B. P. Lenard, Ann. d. Phys. **15**, 459, 1904.

2) Vgl. besonders P. Lenard, Sitzber. d. Heidelberg. Akad. d. Wiss. 1917, Abh. 5 und 7.

1) P. Lenard, Sitzber. d. Heidelb. Akad. d. Wiss. 1914, Abh. 28, S. 39, Anm. 67.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. **47**, 463, 1915.

nehmen können. Daß es sich dabei stets nur um ein momentanes Aufleuchten handeln kann, erhellt ohne weiteres daraus, daß einerseits die Dauer der Erregung nur eine sehr kleine ist, andererseits aber nach den experimentellen Untersuchungen Lenards[1]) durch kurzdauernde Erregung im wesentlichen nur die Momentanbanden der Phosphoreszenz erregt werden. Die Folgerung, daß alle triboluminescierenden Substanzen irgendwie lumineszenzfähig sein müssen, findet sich in allen mir bekannt gewordenen Fällen der Tribolumineszenz vollkommen bestätigt.

Die Erscheinung der temporären Tribolumineszenz, die sich darin äußert, daß eine Substanz, ohne sichtbaren Veränderungen zu unterliegen, nach einiger Zeit ihre Tribolumineszenzfähigkeit in mehr oder weniger hohem Maße verliert, ließe sich auf Grund der vorstehenden Theorie dadurch erklären, daß im Laufe der Zeit infolge der molekularen Bewegungen die elektrischen Doppelschichten gestört werden. In ähnlicher Weise können die weiter oben näher angeführten Temperatureinflüsse gedeutet werden; je tiefer die Temperatur ist, desto ausgeprägter sind die elektrischen Doppelschichten, desto intensiver also auch das Leuchten der Tribolumineszenz. Was schließlich den Einfluß ultraroter oder roter Lichtstrahlung anbelangt, so muß derselbe im allgemeinen negativ sein, da ja für eine „momentane Aufspeicherung" der Erregung eine Beschleunigung der Elektronenrückkehr nicht möglich ist. Höchstens könnte der Fall eintreten, daß durch starke Absorption jenes Lichtes eine molekular-lokale Temperaturerhöhung und damit eine Störung der elektrischen Doppelschichten hervorgerufen wird, was aber wohl als recht unwahrscheinlich bezeichnet werden muß.

Zusammenfassung.

1. Die von A. Imhof gegebene Theorie der Tribolumineszenz steht im Widerspruch mit der Erfahrung.

2. Rotes und ultrarotes Licht vermögen die Tribolumineszenz des Zinksulfids nicht merklich zu beeinflussen.

3. Ein von P. Lenard gegebener Hinweis auf eine Erklärungsmöglichkeit der Tribolumineszenz wird näher ausgeführt. Die so erhaltene Theorie steht mit der bisherigen Erfahrung im Einklang.

1) Vgl. z. B. P. Lenard, Sitzber. d. Heidelb. Akad. d. Wiss. 1909, Abh. 3, S. 33.

Leipzig, im Juni 1918.

(Eingegangen 14. Juni 1918.)

Über die elektrische Leitfähigkeit von Natron-Kalk-Silikat-Gläsern.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von R. Ambronn.

In einer früheren Veröffentlichung[1]) wurden Beobachtungen mitgeteilt, welche über die elektrische Leitfähigkeit von drei nur aus Natron und Kalk als basischen Bestandteilen erschmolzenen Gläsern angestellt waren, die sich voneinander nur hinsichtlich der Konzentration des Natriums unterschieden, während diejenige des Kalziums sehr nahe konstant gehalten war. Es wurde nunmehr die Abhängigkeit der Leitfähigkeit solcher Gläser auch von der Konzentration an CaO festgestellt, sowie der Einfluß ermittelt, welchen die CaO-Konzentration auf die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Na_2O-Konzentration besitzt.

Bezüglich der benutzten Messungsverfahren kann hier auf die oben zitierte Arbeit[2]) verwiesen werden. Erwähnt werde nur, daß durch Verwendung starker Silberrohre, die über die Elektrodenklötze, zwischen welchen die durch Platinierung mit festhaftenden Elektroden versehenen zylindrischen Glasstücke eingespannt wurden, von beiden Seiten einander überdeckend zusammengeschoben waren, eine möglichst gute räumliche Konstanz der Temperatur erzielt wurde. Mittels der in Fig. 2 der genannten Arbeit[1]) gezeichneten Schaltung wurde auch hier wieder ohne Mühe eine vorzügliche zeitliche Konstanz der Temperatur erzielt.

Die zu untersuchenden Glassorten waren in liebenswürdigster Weise nach besonderer Vorschrift von der Firma Schott & Gen. in Jena erschmolzen und zur Verfügung gestellt worden, wofür auch an dieser Stelle zu danken ich nicht unterlassen möchte. Die Zusammensetzung der Gläser zeigt Tabelle I, wobei zugleich nochmals diejenige der bereits früher untersuchten Glassorten unter Nr. 1—3 beigefügt werde.

Man ersieht, daß sowohl der Gehalt an CaO als auch der an Na_2O in weitesten Grenzen schwankt. Nr. 11 konnte jedoch nicht untersucht werden, da es an der Luft nicht haltbar war. Die Zusammensetzung der Gläser ist nur aus der Menge der bei ihrer Herstellung verwandten Rohmaterialien bestimmt; eine genauere chemische Analyse der fertig erschmolzenen Gläser wurde bislang leider nicht ermöglicht, so

1) R. Ambronn, Über die elektrische Leitfähigkeit von Glas und Bergkristall. I. Diss. Göttingen 1913. (Vorläufige Mitteilung s. diese Zeitschr. **14**, 112, 1913.)

2) Vgl. auch R. Ambronn, Untersuchungen über die elektrische Leitfähigkeit des Bergkristalls. Nova Acta, Bd. CI, Nr. 3, 179—268. Halle 1915.

Tabelle I.

Chemische Zusammensetzung der untersuchten Glassorten in Gewichtsprozenten.

No.	Na_2O	CaO	SiO_2
1	18,73	8,45	72,82
2	25,07	7,73	66,00
3	31,55	7,12	61,33
4	22	8	70
5	34	8	58
6	15	12	73
7	22	12	66
8	28	12	60
9	12	16	72
10	20	16	64
11	26	16	58
12	20	20	60
13	36	4	60

daß die Zusammensetzung nur als auf etwa 1 Proz. genau bekannt anzusehen ist. Ob den Gläsern als Flußmittel ein wenig Arsen beigefügt ist, ist nicht sicher bekannt. Es ist jedoch anzunehmen, daß ein solcher Zusatz, wenn vorhanden, in allen Glassorten 4—13 in angenähert gleicher Menge vorliegt und daher den Vergleich der erhaltenen Resultate untereinander nicht allzusehr stört. Dagegen sind die Gläser 1—3 zu einer viel früheren Zeit erschmolzen und die geringen systematischen Abweichungen, welche diese in ihrer Leitfähigkeit von der Reihe 4—13 zeigen werden, sind aus diesem gesonderten Schmelzprozeß leicht zu erklären.

Die Gläser wurden in Gestalt kleiner Säulen von kreisförmigem Querschnitt untersucht. Von jeder Glassorte (4—13) wurden zwei solche Säulchen von verschiedener Größe hergestellt, und zwar war die eine Serie etwa 30 mm hoch bei einem Durchmesser von ca. 11 mm und die andere Serie etwa 15 mm hoch bei einem Durchmesser von ca. 16,2 mm. Dadurch wurde der etwa mögliche Einfluß eines Übergangswiderstandes an den Elektroden auf den Wert der gemessenen Leitfähigkeit im Verhältnis von 1 : 4 variiert, so daß ein solcher, falls in beachtenswertem Maße vorhanden, sich hätte bemerkbar machen müssen, was indessen nicht der Fall war.

Da die Mitteilung der Einzelresultate einer späteren Veröffentlichung vorbehalten werden muß, sollen hier nur die Resultate der Widerstandsmessungen an den angeführten Glassorten beigebracht werden. Die Messungen der Widerstände wurden mit alternierendem Gleichstrom vorgenommen, indem die Stromstärke bestimmt wurde, welche eine gemessene Gleichspannung in dem das Glasstück enthaltenden Kreise erzeugte, wobei durch einen rotierenden Umschalter die Stromrichtung im Glase regelmäßig wechselte. Die Spannung wurde möglichst niedrig gehalten, um die Glassubstanz durch den Stromdurchgang so wenig als irgend angängig zu verändern; sie wechselte zwischen 0,01 und 10 Volt, je nach der Größe der Leitfähigkeit des untersuchten Glasstückes. Die Periodenzahl des alternierenden Gleichstromes lag zwischen 10 und 100 Perioden in der Sekunde, was also 20 bis 200 Richtungswechseln des Stromes in der Sekunde entspricht. Die Widerstandsmessungen sind infolge sorgfältigster Konstruktion des Umschalters und oftmaliger Eichung der Anordnung auf etwa + 0,2 Proz. genau. Die Widerstände der Glasstücke wurden bei etwa 5 bis 10 verschiedenen Temperaturen zwischen 100 und 450 Grad Celsius bestimmt, indem bei jeder Temperatur mindestens 8 Messungen bei wechselnder Spannung und Frequenz vorgenommen wurden. Ein gesetzmäßiger Einfluß der Spannung und der Frequenz auf die Größe des gemessenen Widerstandes war nicht zu erkennen. Aus allen Messungen bei konstanter Temperatur wurde daher das Mittel genommen und aus diesen Werten die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Temperatur bestimmt.

In den früheren Veröffentlichungen war bereits gezeigt, daß die Leitfähigkeit L von Glas sich durch einen Ausdruck darstellen läßt von der Form

$$L = L_0 \, e^{-B/\vartheta},$$

wo L_0 und B Konstanten und ϑ die absolute Temperatur bedeuten. Die Leitfähigkeit verschwindet daher beim absoluten Nullpunkt, sie nimmt für $\vartheta = \infty$ den Wert L_0 an. Die Koeffizienten der obigen Formel sind nun aus den Widerständen, welche für die verschiedenen Temperaturen an den Glasstücken bestimmt waren, nachdem diese Widerstände unter Berücksichtigung der geometrischen Dimensionen der Glasstücke auf die Volumeneinheit reduziert wurden, nach der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen. Für die Glassorten 1—3 sind in der Tabelle II, welche die also berechneten Werte enthält, die früher publizierten Größen eingesetzt.

In den beiden Spalten 4 und 5 sind die mittleren Fehler der beiden Koeffizienten gegeben und dann nach deren Maßgabe aus je den beiden an zwei verschiedenen Stücken der gleichen Glassorte gewonnenen Werten die Mittel L_{0m} und B_m berechnet, deren mittlere Fehler die beiden nächsten Spalten enthalten.

In den so gewonnenen Werten von L_0 und B ist noch die Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von der chemischen Zusammensetzung der Gläser enthalten. Da L_0 und B voneinander ganz unabhängig sind und jede von zwei unabhängigen Variablen abhängt, so kann der Ausdruck für diese Abhängigkeit nicht ganz

Tabelle II.

No.	L_0	B	$m(L_0)$ Proz.	$m(B)$	L_{0m}	B_m	$m(L_{0m})$ Proz.	$m(B_m)$
1	96.6	9482,0	—	—	—	—	—	—
2	155,6	8779,0	—	—	—	—	—	—
3	200.8	8155,0	—	—	—	—	—	—
4a	124,2	9292.1	+ 2.5	+ 15.6	123.89	9308,2	+ 2.9	+ 15,8
b	123,8	9314,0	1.4	8,1				
5a	262.2	8210.6	1.6	9.1	265.06	8218.9	4.8	25.7
b	300,0	8275,1	4.5	24,1				
6a	69.05	10455.9	2.5	14,7	69.69	10460.5	5.3	29.0
b	69,80	10473.0	4.7	25.0				
7a	151,2	9724,4	3.2	17.7	149.61	9725.8	4.7	26.6
b	147,8	9726,9	3.5	19,8				
8a	249.3	9022.0	1.2	6.9	243,61	8996.0	2.8	15.3
b	205,3	8888.9	2,0	13.7				
9a	51,81	11120,0	8.2	46,0	52.02	11115.1	10,0	56.7
b	52,12	11109,4	5.7	32,7				
10a	134.1	10258,2	4.2	21,3	153.44	10340.0	4.4	22.9
b	155.6	10350.7	1.3	7.8				
12a	147.2	10810.8	3.1	16,8	209.51	10817.0	3.5	19.1
b	213.1	10810.0	1.6	9,1				
13a	265,7	7924.3	5.4	30.2	269.31	7931.0	7.7	25.1
b	273.1	7933.3	5.4	17.9				

einfach sein, es werden vielmehr für jede der beiden Größen mindestens drei Konstanten zu bestimmen sein.

Es sei c die Konzentration des Glases an Na_2O in Gewichtsprozenten, k diejenige an CaO, so daß die Konzentration an SiO_2 sich zu $100 - (c + k)$ bestimmt. Mit hinreichender Genauigkeit genügt dann der Ausdruck

$$L_0 = M + \mu \cdot c + \nu \cdot k$$

den Beobachtungen, wo M, μ und ν zu bestimmende Konstante bezeichnen. Das bedeutet, daß die Leitfähigkeit der Gläser bei unendlich hoher Temperatur proportional den Konzentrationen an Na_2O und CaO wird. Berücksichtigt man die Resultate an allen Glassorten 1—13, so findet man, wenn allen Beobachtungen ein Gewicht proportional der Größe von L_0 beigelegt wird, nach der Methode der kleinsten Quadrate als wahrscheinlichste Werte von M, μ und ν:

$$M = -196{,}65 \pm 26{,}44\,;\ \mu = 12{,}08 \pm 0.74\,;$$
$$\nu = 6{,}770 \pm 1{,}220,$$

denen die mittleren Fehler beigefügt sind, und ebenso erhält man aus der Zusammenfassung der an den Gläsern 4—13 allein gewonnenen Resultate als wahrscheinlichste Werte für M, μ und ν:

$$M = -214{,}68 \pm 22{,}84\,;\ \mu = 12{,}58 \pm 0{,}61\,;$$
$$\nu = 7.515 + 1{,}064,$$

welche Werte gemäß den beigefügten rechnerischen mittleren Fehlern eine größere Genauigkeit aufweisen, als die aus den Beobachtungen 1—13 gewonnenen, was dem aus den oben erwähnten Gründen in sich homogeneren Material zuzuschreiben ist.

Die entsprechenden Gleichungen für L_0 lauten demgemäß:

$$L_0 = 12{,}08 \cdot c + 6{,}770 \cdot k - 196{,}65 \text{ bzw.}$$
$$L_0 = 12{,}58 \cdot c + 7{,}515 \cdot k - 214{,}68,$$

wobei die zweite Gleichung das homogenere Material umfaßt und daher bei den folgenden Ausführungen bevorzugt werden soll.

Die Ausdrücke zeigen, daß die Leitfähigkeit erst positive (d. h. physikalisch reelle) Werte annimmt, wenn eine Mindestmenge von Na_2O oder CaO in einem Glase enthalten ist, die sich berechnet aus der Gleichung

$$12{,}58 \cdot c + 7{,}515 \cdot k = 214{,}68.$$

Ist nur eine der Komponenten vorhanden, so müßte als Mindestkonzentration in Gewichtsprozenten

im Falle $c = 0$ an CaO vorhanden sein
$k = 28{,}5$ Proz.,

und im Falle $k = 0$ an Na_2O vorhanden sein
$c = 17{,}08$ Proz.

Hier und bei den folgenden Überlegungen sind nur die aus der zweiten Reihe von Beobachtungen an den Gläsern 4—13 sich ergebenden Resultate verwendet.

Diese Erscheinung, daß ein Teil der im Glase vorhandenen Na_2O- bzw. CaO-Menge für die Leitfähigkeit nicht in Betracht kommt, war bereits in der früheren Veröffentlichung[1]) bemerkt, doch konnte dort der Einfluß der CaO-Konzentration auf diese Bindung eines Teiles des in dem Glase vorhandenen Metalles nicht nachgewiesen werden. Jetzt aber läßt sich an Hand des beigebrachten umfangreicheren Mate-

1) Diss. Göttingen, S. 58 ff.

rials der Vorgang genauer verfolgen. Es werde zu diesem Zwecke die Zusammensetzung des Glases von Gewichtsprozenten in Atomprozente umgerechnet, d. h. es sei mit q bzw. ψ die Anzahl der Na- bzw. Ca-Atome in je 100 Atomen der Glassubstanz bezeichnet. Man schreibt dann die Gleichung für L_0 von den c und k auf q und ψ um durch die Substitutionen:

$$k = 1{,}605\,\psi \quad (0{,}573 + 0{,}00457\,\psi + 0{,}00026\,q)$$
$$c = 0{,}885\,q \quad (0{,}573 + 0{,}00457\,\psi + 0{,}00026\,q).$$

Berechnet man zunächst die Atomkonzentrationen für den Fall, daß die Grenzleitfähigkeit L_0 und damit zugleich auch die Leitfähigkeit bei allen Temperaturen gerade verschwindet, daß also c bzw. k die oben berechneten Werte annehmen, so würde man, falls das Glas nur Na oder nur Ca als basischen Bestandteil enthielte, nunmehr für die kritischen Atomkonzentrationen die folgenden Werte erhalten.

Wenn das Glas nur Ca enthält, so ist $c = 0 = q$ und es wird $\psi = 11{,}4$ bzw. $11{,}1$. Im Falle das Glas nur Na enthält, so ist $k = 0 = \psi$ und es wird $q = 10{,}6$ bzw. $11{,}1$. Um also eine von Null verschiedene Leitfähigkeit bei einem reinen Natron- bzw. reinen Kalksilikatglas zu erhalten, muß dieses Glas mindestens 11 Atome Na oder mindestens 11 Atome Ca auf je 100 Atome insgesamt enthalten. In bezug auf die Bildung des festen, offenbar undissoziierbaren Bestandteiles des Glases, wozu wohl diese je 11 Atome Metall gebraucht werden, sind also 11 Atome Na 11 Atomen Ca äquivalent.

Das ist ein sehr auffälliges Resultat, denn Na ist ein einwertiges, Ca aber ein zweiwertiges Metall und trotzdem besitzen sie für den die Elektrizität nicht leitenden Teil des Glases scheinbar dieselbe Bedeutung. Nun ist über die Molekulargewichte fester Substanzen bisher fast nichts bekannt[1]), so daß bisher eine Entscheidung, ob die an flüssigen bzw. gasförmigen Substanzen abgeleiteten Begriffe des Molekulargewichtes bzw. der Bindung der Atome im Molekül aneinander auch für den festen Aggregatzustand übernommen werden können, nicht vorliegt. Die Mehrzahl der auf diese Frage bezüglichen Theorien erkennt allerdings bereits einen Unterschied zwischen dem festen Zustand gegenüber dem flüssigen insofern an, als im festen Aggregatzustande dem Atom eine wesentlich selbständigere Rolle zugesprochen werden muß als im flüssigen, und daß der Begriff der Wertigkeit bei festen Körpern wohl nur eingeschränkte Bedeutung besitzen dürfte.

Geht man nun von den beiden oben behandelten Grenzfällen zu dem allgemeinen Falle über, daß nämlich Na und Ca gleichzeitig in dem Glase vorhanden sind, aber wiederum insgesamt in solcher Menge, daß die Leitfähigkeit gerade noch den Wert Null besitzt, so berechnen sich die Wertepaare für c und k aus der Gleichung

$$12{,}58 \cdot c + 7{,}515 \cdot k = 214{,}68.$$

Ersetzt man jetzt die c und k wiederum durch die q und ψ, so wird

$$0{,}885\,q = 17{,}07\,(0{,}573 + 0{,}00457\,\psi + 0{,}0026\,q) - 0{,}598 \times 1{,}605\,\psi$$

oder

$$0{,}881\,q = 9{,}78 - 0{,}881\,\psi.$$

Man sieht, daß q und ψ den gleichen Faktor haben, wie das ja aus den obigen Ausführungen nicht anders zu erwarten war, während die vollkommene Übereinstimmung der beiden Faktoren mit 0,881 natürlich auf einen Zufall zurückzuführen ist. Obgleich also die beiden Faktoren physikalisch eine verschiedene Bedeutung besitzen könnten, kann hier doch wohl ohne Bedenken die Gleichung in der Form geschrieben werden:

$$0{,}881\,(q + \psi) = 9{,}78,$$

daher

$$q + \psi = 11{,}1 \text{ Atomprozente.}$$

Es folgt daraus also ganz allgemein die Regel: Ein reines Natron-Kalk-Silikatglas zeigt nur dann eine von Null verschiedene Leitfähigkeit, wenn sein Gehalt an Na- und Ca-Atomen zusammen mindestens 11 Atome auf je 100 Atome des Glases beträgt. Übersteigt die Summe der Na- und Ca-Atome zusammen diesen Mindestbetrag, so ist die Grenzleitfähigkeit bei unendlich hoher Temperatur proportional dem Überschusse des Glases an Na- bzw. Ca-Atomen über die oben bestimmten 11 Prozent, jedoch gelten für den Einfluß der Na- bzw. Ca-Konzentrationen verschiedene Proportionalitätsfaktoren.

Dieses Verhalten des Glases, daß auf die Menge der zur Verfestigung dienenden nicht abdissoziierbaren Atome der Basen die aus der Theorie der Lösungen folgende Valenz derselben keine Bedeutung zu haben scheint, ist so auffällig, daß es sich fraglos lohnen würde, noch andere Glassorten mit anderen Metallen als Silikatbildnern zu untersuchen; denn das hier beigebrachte Material ist, da es sich nur auf Ca und Na bezieht, zu weiteren Schlüssen über den Molekularzustand fester Körper noch nicht hinreichend.

Es bleibt jetzt noch die Abhängigkeit der Größe B, welche der Veränderung der Leitfähigkeit mit der Temperatur Rechnung trägt, von den Konzentrationen c und k zu bestimmen übrig. Eine graphische Darstellung der erhal-

1) Nernst, Theoretische Chemie. 7. Aufl., S. 298 f., 1913.

tenen Werte zeigte, daß man die Beobachtungen am besten durch eine vierkonstantige Formel auszudrücken vermag, welche besagt, daß B mit wachsendem c abnimmt und mit steigendem k zunimmt, doch nicht bei allen c in gleicher Weise, sondern so, daß die Abhängigkeit des B von k mit wachsendem c immer geringer wird. Ein solches Verhalten läßt sich durch den Ausdruck

$$B = \alpha c k + \beta c + \gamma k + \delta$$

darstellen.

Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate erhält man aus den in Tabelle II gegebenen Werten von B, indem man allen gleiches Gewicht beilegt, für die α, β, γ, δ die Werte:

Bei Berücksichtigung aller 12 Glassorten:

$$\alpha = -4{,}0321, \quad \beta = -51{,}927, \quad \gamma = 197{,}63, \quad \delta = 9477{,}3;$$

bei Berücksichtigung allein der Glassorten 4—13:

$$\alpha = -3{,}4040, \quad \beta = -59{,}045, \quad \gamma = 174{,}00, \quad \delta = 9803{,}7.$$

Die Ausdrücke für B werden also

$$B = 9477{,}3 - 51{,}927\, c + 197{,}63\, k - 4{,}0321\, c\, k \quad \text{bzw.}$$

$$B = 9803{,}7 - 59{,}045\, c + 174{,}00\, k - 3{,}4040\, c\, k.$$

Eine Verwandlung der c und k in die Atomprozente φ und ψ bringt hier weiter keine Aufklärungen. Die Formel gibt ferner einen Wert von c, für den B von k unabhängig ist. Nach der zuverlässigeren zweiten Formel müßte dann $c = 51$ Proz. sein, was praktisch unmöglich ist, weswegen diese Überlegung keinerlei Bedeutung besitzt.

In dem B ist die Wärmetönung des Prozesses der Dissoziation des Glases enthalten und es würde natürlich von sehr großem Interesse sein, die Abhängigkeit derselben von der Konzentration an Na_2O bzw. CaO kennen zu lernen. Außerdem ist aber in B auch die Veränderung der inneren Reibung mit der Temperatur enthalten und diese beiden Größen sind nun auf keine Weise voneinander zu trennen. Eine Möglichkeit, wenigstens eine Andeutung über die Art der Zusammensetzung von B aus Wärmetönung und Reibungseinfluß zu erhalten, würde sich durch die Bestimmung der Abhängigkeit der Dissoziation von der Temperatur gewinnen lassen, wie das bereits in einer früheren Untersuchung[1]) für die Glassorten 1—3 durch Messungen an Konzentrationsketten, welche aus zwei verschiedenen Glassorten gebildet waren, versucht wurde. Doch waren die damals erhaltenen Resultate infolge der Schwierigkeit der Messung so unsicher, daß an dem vorliegenden erweiterten Materiale derartige Versuche nicht wiederholt wurden.

Zum Schluß seien noch die Ausdrücke für die Leitfähigkeit reiner Na-Ca-Silikatgläser in Abhängigkeit von der Na_2O- und CaO-Konzentration und von der Temperatur vollständig hingeschrieben:

für die Glassorten 1—13

$$L = (12{,}08\, c + 6{,}770\, k - 196{,}65)\, e^{-\frac{1477{,}3 - 51{,}927\, c + 197{,}63\, k - 4{,}0321\, c\, k}{\vartheta}},$$

für die Glassorten 4—13 allein aber

$$L = (12{,}58 \cdot c + 7{,}515\, k - 214{,}68)\, e^{-\frac{9803{,}7 - 59{,}045\, c + 174{,}00\, k - 3{,}4040\, c\, k}{\vartheta}}.$$

Die große Zahl von je sieben Konstanten darf nicht auffallen, da die Formeln die Abhängigkeit der L von drei unabhängigen Variablen ausdrücken müssen und der Faktor vor der e-Funktion von dem Exponenten vollkommen unabhängig ist. Sechs Konstanten wären das überhaupt mögliche Minimum, falls die Gehalte der Gläser an Na und Ca keinerlei Rückwirkung aufeinander bezüglich der Leitfähigkeit im Gefolge haben würden, was ja aber von vornherein ganz unwahrscheinlich ist.

Zusammenfassung.

Es wird die Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit reiner Na-Ca-Silikatgläser von ihrem Gehalt an Na_2O und CaO, sowie von der Temperatur festgestellt. Die Abhängigkeit von der Temperatur wird durch eine einfache Exponentialfunktion mit der reziproken absoluten Temperatur im Exponenten bestimmt. Der Koeffizient der Exponentialfunktion zeigt, daß nicht alle in dem Glase vorhandenen Na- bzw. Ca-Silikate dissoziationsfähig sind, sondern daß vielmehr von je insgesamt 100 Atomen der Substanz zusammen 11 Atome Na oder Ca von vornherein festgelegt sind und erst die über diese Zahl überschießenden Atome für die Leitfähigkeit in Betracht kommen. Dabei ist besonders hinzuweisen auf den Umstand, daß in dem nicht dissoziationsfähigen Teile des Glases die zweiwertigen Ca- den einwertigen Na-Atomen gleichwertig sind.

Die Untersuchung wurde angestellt im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule in Braunschweig, indem die Mittel des Institutes dazu von dem Direktor, Herrn Professor Diesselhorst, in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellt wurden, wofür auch an dieser Stelle besonders gedankt sei.

(Eingegangen 17. Juni 1918.)

1) R. Ambronn, Inaug.-Diss. S. 61 ff.

Zur Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome Koordinaten. II.

Von Clemens Schaefer.

In einer kurzen Notiz über den obigen Gegenstand[1]) habe ich eine mir recht einfach erscheinende Herleitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip angegeben. Dazu teilte Herr F. Noether mir mit, daß er im wesentlichen dieselbe Herleitung in seiner Dissertation[2]) bereits 1909 angegeben habe, was ich hier hervorhebe.

Die Nichtgültigkeit der gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome Koordinaten beruht darauf, daß für solche (in den Bezeichnungen meiner ersten Note) die Beziehung

$$\delta\overset{*}{(\pi_r)} = \frac{d}{dt}(\delta\pi_r)$$

nicht gilt. Daß gerade dieser Umstand die Verallgemeinerung bedingt, tritt in der dort gegebenen Darstellung nicht hervor. Deshalb mag es gestattet sein, meine erste Mitteilung im folgenden nach dieser Seite hin zu ergänzen, wobei ich wieder betonen möchte, daß ich nicht beanspruche, etwas Neues zu sagen, sondern daß nur die Frage, wie dieser Gegenstand im Unterricht zu behandeln sei, mich zu dieser zweiten Notiz veranlaßt.

Es seien, wie in der ersten Mitteilung, q_k ($k = 1, 2, \ldots n$) wahre, voneinander unabhängige Koordinaten; a_{kr}, β_{rk} gewisse Funktionen von ihnen; es werden damit die n Ausdrücke gebildet:

$$\left.\begin{aligned} \delta\pi_r &= \sum_k^{1,n} a_{kr}\,\delta q_k, \\ \overset{*}{\pi}_r &= \sum_k^{1,n} a_{kr}\frac{dq_k}{dt} = \sum_k a_{kr}\dot{q}_k \end{aligned}\right| \quad r, k = 1, 2, \ldots n \tag{1}$$

Die Auflösung derselben nach δq_k bzw. $\dot{q}_k$ liefere:

$$\left.\begin{aligned} \delta q_k &= \sum_r^{1,n} \beta_{rk}\,\delta\pi_r, \\ q_k &= \sum_r \beta_{rk}\overset{*}{\pi}_r \end{aligned}\right| \quad r, k = 1, 2 \ldots n. \tag{2}$$

$\overset{*}{\pi}_r$ steht statt $\frac{d\pi_r}{dt}$ bzw. $\dot{\pi}_r$, um die Auffassung zu verhüten, als ob es sich um Ableitungen von Größen π_r handle, was nur zutreffen würde, wenn die Gleichungen (1) integrabel, d. h. die Beziehungen

$$\frac{\partial a_{kr}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial a_{\lambda r}}{\partial q_k} = 0 \tag{3}$$

erfüllt wären. Sind die Integrabilitätsbedingungen (3) nicht erfüllt, was wir von jetzt ab ausdrücklich annehmen wollen, so nennt man eben die $\delta\pi_r$ und $d\pi_r$ Variationen und Differentiale von nichtholonomen Koordinaten.

Wir wollen zunächst zeigen, daß in der Tat für nichtholonome Koordinaten

$$\delta\overset{*}{(\pi_r)} \neq \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) \text{ ist}^1).$$

Durch Differentiation der ersten Gleichung (1) findet man:

$$\frac{d}{dt}(\delta\pi_r) = \sum_k a_{kr}\frac{d\delta q_k}{dt} + \sum_k \frac{da_{kr}}{dt}\delta q_k, \tag{4}$$

ebenso durch Variation der zweiten Gleichung (1):

$$\delta\overset{*}{(\pi_r)} = \sum_k a_{kr}\frac{d\delta q_k}{dt} + \sum_k \delta a_{kr}\dot{q}_k; \tag{5}$$

und durch Subtraktion folgt:

$$\delta\overset{*}{(\pi_r)} = \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) + \sum_k (\delta a_{kr}\dot{q}_k - a_{kr}\delta\dot{q}_k). \tag{6}$$

$\delta\overset{*}{\pi}_r$ stimmt also nur dann mit $\frac{d\delta\pi_r}{dt}$ überein, wenn der Ausdruck

$$\sum_k (\delta a_{kr}\dot{q}_k - a_{kr}\delta\dot{q}_k)$$

verschwindet. Diesen Ausdruck wollen wir passend umformen, um seine Beziehung zu den Integrabilitätsbedingungen (3) hervortreten zu lassen. Wir schreiben zunächst:

$$a_{kr} = \sum_\lambda \frac{\partial a_{kr}}{\partial q_\lambda}\dot{q}_\lambda.$$

Dann wird aus (6):

$$\delta\overset{*}{(\pi_r)} = \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) + \sum_k \delta a_{kr}\dot{q}_k - \sum_k\sum_\lambda \frac{\partial a_{kr}}{\partial q_\lambda}\dot{q}_\lambda\delta q_k,$$

oder, wenn wir im letzten Gliede, was statthaft ist, die beiden Summationsbuchstaben k und λ vertauschen:

$$\delta\overset{*}{(\pi_r)} = \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) + \sum_k \dot{q}_k\left\{\delta a_{kr} + \sum_\lambda \frac{\partial a_{\lambda r}}{\partial q_k}\delta q_\lambda\right\}$$

oder endlich, da $\delta a_{kr} = \sum_\lambda \frac{\partial a_{kr}}{\partial q_\lambda}\delta q_\lambda$ ist:

$$\delta\overset{*}{(\pi_r)} = \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) - \sum_k\sum_\lambda \dot{q}_k\delta q_\lambda\left\{\frac{\partial a_{\lambda r}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{kr}}{\partial q_\lambda}\right\}. \tag{7}$$

1) Cl. Schaefer, diese Zeitschr. **19**, 129 ff., 1918.

2) F. Noether, München. Inaug.-Diss. 1909; die allgemeine Form der verallg. Lagrangeschen Gleichungen finde ich jedoch dort nicht.

1) Man vgl. hierzu insbesondere: G. Hamel, Math. Ann. **59**, 416 ff., 1904.

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist aber nichts anderes als die linke Seite der Integrabilitätsbedingungen (3); sind diese erfüllt, so ist $\delta\overset{*}{(\pi_r)} = \frac{d}{dt}(\delta\pi_r)$; sind sie nicht erfüllt, was hier vorausgesetzt wurde, so ist:

$$\delta\overset{*}{(\pi_r)} \neq \frac{d\,\delta\pi_r}{dt}.$$

Wir können mit Hilfe von (2) die Gleichung (7) noch etwas umgestalten, indem wir unter Einführung zweier neuer Summationsbuchstaben ϱ und σ schreiben:

$$\dot{q}_\lambda = \sum_\varrho \beta_{\varrho\lambda}\cdot\overset{*}{\pi}_\varrho$$

$$\delta q_\lambda = \sum_\sigma \beta_{\sigma\lambda}\cdot\delta\pi_\sigma.$$

Man erhält dann als allgemeine Formel aus (7):

$$\delta\overset{*}{(\pi_r)} = \frac{d}{dt}(\delta\pi_r) - \sum_k\sum_\sigma\sum_\lambda\sum_\varrho\left\{\frac{\partial\alpha_{\lambda r}}{\partial q_k} - \frac{\partial\alpha_{kr}}{\partial q_\lambda}\right\}\cdot\overset{*}{\pi}_\varrho\,\beta_{\varrho k}\beta_{\sigma\lambda}\,\delta\pi_\sigma. \qquad (8)$$

Wir gehen nun zur Ableitung der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip über. Denken wir uns zunächst L und Φ als Funktionen der wahren Koordinaten und Geschwindigkeiten q_k und $\dot{q}_k$ gegeben, so tritt in der Variation von L ein Glied mit dem Faktor $\delta\left(\frac{dq_k}{dt}\right)$ auf. Da für wahre Koordinaten die Operationen δ und $\frac{d}{dt}$ vertauschbar sind, so kann in diesem Falle dieses Glied in der bekannten Weise durch partielle Integration umgestaltet werden. Dies ist nicht mehr möglich, wenn L und Φ als Funktionen der q_k und $\overset{*}{\pi}_r$ dargestellt sind; sie mögen dann in L' und Φ' übergehen. Dann kann man jedoch zum gewünschten Ziele gelangen, wenn man nun die Formel (8) benutzt. Das erste Glied der rechten Seite von (8) entspricht dem gewöhnlich allein auftretenden, und wird in der normalen Weise durch partielle Integration umgeformt; das zweite Glied der rechten Seite dagegen liefert das erforderliche Korrektionsglied der Lagrangeschen Gleichungen.

Wir gehen demgemäß aus von der Gleichung des Hamiltonschen Prinzips:

$$\delta\int(L' - \Phi')\,dt = 0$$

oder:

$$\int dt\sum_r\frac{\partial L'}{\partial\pi_r}\delta\pi_r + \int dt\sum_r\frac{\partial L'}{\partial\overset{*}{\pi}_r}\delta\overset{*}{(\pi_r)} - \int dt\sum_r\frac{\partial\Phi'}{\partial\pi_r}d\pi_r = 0\,[1],$$

oder, wenn wir jetzt für $\delta\overset{*}{(\pi_r)}$ den Wert nach (8) einführen:

$$\int dt\sum_r\left[\frac{\partial L'}{\partial\pi_r} - \frac{\partial\Phi'}{\partial\pi_r}\right]\delta\pi_r + \int dt\sum_r\frac{\partial L'}{\partial\overset{*}{\pi}_r}\frac{d}{dt}(\delta\pi_r) - \int dt\sum_r\frac{\partial L'}{\partial\overset{*}{\pi}_r}\cdot\sum_k\sum_\sigma\sum_\lambda\sum_\varrho\beta_{\varrho k}\beta_{\sigma\lambda}\cdot\overset{*}{\pi}_\varrho\left\{\frac{\partial\alpha_{\lambda r}}{\partial q_k} - \frac{\partial\alpha_{kr}}{\partial q_\lambda}\right\}\cdot\delta\pi_\sigma = 0.$$

Vertauschen wir im letzten Gliede links die Summationsbuchstaben σ und r miteinander, so daß auch in diesem Gliede jetzt der Faktor $\delta\pi_r$ auftritt, und formen das zweite Glied links in der üblichen Weise durch partielle Integration um, so folgt:

$$\int dt\sum_r\delta\pi_r\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial\overset{*}{\pi}_r}\right) - \frac{\partial L'}{\partial\pi_r} + \frac{\partial\Phi'}{\partial\pi_r} + \sum_k\sum_\sigma\sum_\lambda\sum_\varrho\frac{\partial L'}{\partial\overset{*}{\pi}_\sigma}\beta_{\varrho k}\beta_{r\lambda}\overset{*}{\pi}_\varrho\left\{\frac{\partial\alpha_{\lambda\sigma}}{\partial q_k} - \frac{\partial\alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda}\right\}\right] = 0,$$

oder, da die $\delta\pi_r$ voneinander unabhängig sind:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial\overset{*}{\pi}_r}\right) - \frac{\partial L'}{\partial\pi_r} + \sum_k\sum_\lambda\sum_\sigma\sum_\varrho\beta_{\varrho k}\beta_{r\lambda}\overset{*}{\pi}_\varrho\frac{\partial L'}{\partial\overset{*}{\pi}_\sigma}\left\{\frac{\partial\alpha_{\lambda\sigma}}{\partial q_k} - \frac{\partial\alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda}\right\} = -\frac{\partial\Phi'}{\partial\pi_r} = II_r,$$

was mit der Endgleichung in der ersten Note übereinstimmt, wenn man noch im dritten Gliede links die Summationsbuchstaben λ und k miteinander vertauscht:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial\overset{*}{\pi}_r}\right) - \frac{\partial L'}{\partial\pi_r} + \sum_k\sum_\lambda\sum_\sigma\sum_\varrho\beta_{\varrho\lambda}\beta_{rk}\overset{*}{\pi}_\varrho\frac{\partial L'}{\partial\overset{*}{\pi}_\sigma}\cdot\left(\frac{\partial\alpha_{k\sigma}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial\alpha_{\lambda\sigma}}{\partial q_k}\right) = II_r. \qquad (9)$$

1) Dabei ist zu bemerken, daß $\frac{\partial L'}{\partial\pi_r}$ und $\frac{\partial\Phi'}{\partial\pi_r}$ hier in erweitertem Sinne als sonst gebraucht wird, da die Größen „π_r" ja gar nicht existieren. $\frac{\partial L'}{\partial\pi_r}$ ist hier als Abkürzung für $\sum_k\frac{\partial L'}{\partial\dot{q}_k}\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial\pi_r} = \sum_k\frac{\partial L'}{\partial\dot{q}_k}\beta_{rk}$, ebenso $\frac{\partial\Phi'}{\partial\pi_r}$ als Abkürzung für $\sum_k\frac{\partial\Phi'}{\partial\dot{q}_k}\beta_{rk}$ zu verstehen.

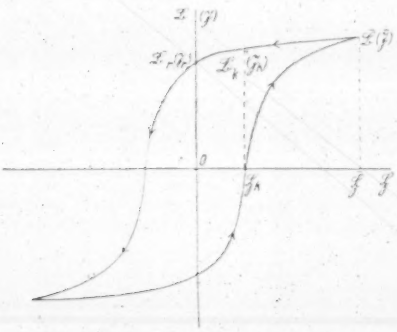
(Eingegangen 18. Juni 1918.)

Eine Zahlenbeziehung zwischen drei Ordinaten der Hysteresisschleife.

Von Otto Grotrian.

Bei näherer Untersuchung der Hysteresisschleife ist mir eine Zahlenbeziehung zwischen drei Ordinaten derselben aufgefallen, die ich im folgenden mitteilen und durch einiges Zahlenmaterial als nahe zutreffend erweisen möchte.

In Fig. 1 ist eine beliebige Schleife dargestellt, bei der die Koordinatenänderungen sich in üblicher Weise im Sinne der Pfeile vollziehen.



Es bezeichne $\mathfrak{B}$ die Induktion
oder auch $\mathfrak{J}$ die Magnetisierung,
$\mathfrak{H}$ die magnetische Kraft.

Für $\mathfrak{H} = 0$ sei
$\mathfrak{B}_r$ oder $\mathfrak{J}_r$ die Remanenz.

Dem Höchstwerte $\mathfrak{H} = \overline{\mathfrak{H}}$
entspreche $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}}$ oder $\mathfrak{J} = \overline{\mathfrak{J}}$.

Für den Wert der Koerzitivkraft gleich $\mathfrak{H}_k$ sei in der oberen Hälfte der Figur die Ordinate des oberen Zweiges durch $\mathfrak{B}_k$ oder $\mathfrak{J}_k$ bezeichnet.

Es zeigt sich nun, daß mit ziemlicher Annäherung

$$\mathfrak{B}_k = \frac{1}{2}(\mathfrak{B}_r + \overline{\mathfrak{B}})$$

oder auch $$\mathfrak{J}_k = \frac{1}{2}(\mathfrak{J}_r + \overline{\mathfrak{J}})$$

ist. Die Beziehung erweist sich nicht für jede beliebige Schleife als zutreffend, sondern nur für Fälle, in denen die Retention

$$\frac{\mathfrak{B}_r}{\overline{\mathfrak{B}}} \text{ oder } \frac{\mathfrak{J}_r}{\overline{\mathfrak{J}}}$$

größer oder mindestens gleich 0,7 ist.

In der folgenden Tabelle gebe ich eine Zusammenstellung von Zahlen nach J. A. Ewing, M. Wien, R. Gans und F. Erhardt.

Die erste Vertikalreihe unter I enthält die laufende Nummer der mitgeteilten Tabelle, unter II ist die Nummer der Figur in einer der zitierten Abhandlungen angeführt[1]). Die III., IV. und V. Kolumne geben die Zahlen für die Koerzitivkraft, Remanenz und die Höchstwerte von $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{J}$, die VI. enthält die Retention. Unter VII und VIII sind angegeben $\frac{1}{2}(\mathfrak{B}_r + \overline{\mathfrak{B}})$ bzw. $\frac{1}{2}(\mathfrak{J}_r + \overline{\mathfrak{J}})$ und $\mathfrak{B}_k$ bzw. $\mathfrak{J}_k$. In Kolumne IX sind die Abweichungen zwischen $\mathfrak{B}_k$ und $\frac{1}{2}(\mathfrak{B}_r + \overline{\mathfrak{B}})$ bzw. $\mathfrak{J}_k$ und $\frac{1}{2}(\mathfrak{J}_r + \overline{\mathfrak{J}})$ unter Δ in Prozenten von $\mathfrak{B}_k$ ($\mathfrak{J}_k$) angegeben.

Die Zahlen unter III, IV, V, VIII sind mit tunlichster Sorgfalt den Kurven in den betreffenden Abhandlungen entnommen, wobei auch eventuell beigegebene Zahlentabellen verwendet wurden.

Die Beschaffenheit der untersuchten Eisenproben ist nach den Mitteilungen der Beobachter durch die folgende Zusammenstellung gekennzeichnet, wobei die Reihenfolge der früheren Tabelle eingehalten ist. Die Materialien ohne Angabe der Form des Probestückes sind an geradlinigen Drähten untersucht, bei denen der Einfluß der Enden auf den Wert von $\mathfrak{H}$ zu vernachlässigen ist.

1. Sehr weicher ausgeglühter Eisendraht.
2. Weicher ausgeglühter Eisendraht.
3. „ „ „
4. Klavier-Stahldraht.
5. „ „ . Glashart.
6. Sehr weiches Eisen. Ring.
7. Ausgeglühter Stahldraht.
8. Stahldraht. Glashart.
9. Klavier-Stahldraht. Ausgeglüht.
10. Ausgeglühter Eisendraht. Weich.
11. 12. 13. Ausgeglühter Klavier-Stahldraht bei verschiedenen Höchstwerten $\mathfrak{J}$.
14. Sehr weicher Eisendraht. Ring.
15. Gehärteter Remy-Magnetstahl } Ellipsoid.
16. Geglühter „ „ }
17. Haardraht. Ring aus zusammengewickeltem Draht.

Man erkennt, daß die Eisensorte und Struktur der einzelnen Versuchsobjekte eine wesentlich verschiedene war.

1) In der neben 11, 12, 13 genannten Fig. 16 Ewings sind die 3 größten Schleifen benutzt.

Zahlen nach J. A. Ewing[1]).

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
No.	Figur der Abhandlung	$\mathfrak{H}_k$	$\mathfrak{B}_r$	$\overline{\mathfrak{B}}$	$\frac{\mathfrak{B}_r}{\overline{\mathfrak{B}}}$	$\frac{1}{2}(\mathfrak{B}_r+\overline{\mathfrak{B}})$	$\mathfrak{B}_k$	Δ %
1	4	1,89	10873	13307	0,817	12090	12225	— 1,06%
2	5	2,80	14537	15630	0,930	15083	15120	— 0,26
3	6	2,80	12070	16000	0,754	14035	13415	+ 4,62
4	11	26,94	11925	14540	0,820	13232	13350	— 0,90
5	13	41,35	9410	12765	0,737	11087	11010	+ 0,73
6	2	1,69	9120	11195	0,815	10157	10255	— 0,88
7	9	17,55	11800	14780	0,798	13290	13380	— 0,67
8	10	34,12	6780	9380	0,723	8080	8540	— 5,39
9	12	22,40	10390	14360	0,724	12375	12270	+ 0,81
			$\mathfrak{J}_r$	$\overline{\mathfrak{J}}$	$\frac{\mathfrak{J}_r}{\overline{\mathfrak{J}}}$	$\frac{1}{2}(\mathfrak{J}_r+\overline{\mathfrak{J}})$	$\mathfrak{J}_k$	
10	14I	1,56	915	1234	0,741	1074	1075	— 0,09
11	16	17,90	785	1088	0,722	936	917	+ 2,07
12	16	15,95	598	758	0,789	678	714	— 5,04
13	16	14,65	441	587	0,751	514	537	— 4,28

Zahlen nach M. Wien[2])

			$\mathfrak{B}_r$	$\overline{\mathfrak{B}}$	$\frac{\mathfrak{B}_r}{\overline{\mathfrak{B}}}$	$\frac{1}{2}(\mathfrak{B}_r+\overline{\mathfrak{B}})$	$\mathfrak{B}_k$	
14	25 ($N=0$)	1,70	2800	3700	0,757	3250	3390	— 4,13

Zahlen nach R. Gans[3])

			$\mathfrak{J}_r$	$\overline{\mathfrak{J}}$	$\frac{\mathfrak{J}_r}{\overline{\mathfrak{J}}}$	$\frac{1}{2}(\mathfrak{J}_r+\overline{\mathfrak{J}})$	$\mathfrak{J}_k$	
15	3	52,5	825	1090	0,757	957	960	— 0,31
16	4	14,0	1100	1325	0,830	1212	1160	+ 4,48

Zahlen nach F. Erhardt[4])

			$\mathfrak{J}_r$	$\overline{\mathfrak{J}}$	$\frac{\mathfrak{J}_r}{\overline{\mathfrak{J}}}$	$\frac{1}{2}(\mathfrak{J}_r+\overline{\mathfrak{J}})$	$\mathfrak{J}_k$	
17	4	11,50	1348	1463	0,921	1405	1434	— 2,09

1) J. A. Ewing, Experimental Researches in Magnetism. Phil. Trans. **176**. (II), 523—640, 1895.
2) M. Wien, Über die Magnetisierung durch Wechselstrom. Wied. Ann. **66**. 859—953. 1898.
3) R. Gans, Zur Theorie des Ferromagnetismus. Ann. d. Phys. (4), **33**, 1065—1095, 1910.
4) F. Erhardt, Die reversible magnetische Permeabilität bei hohen Frequenzen. Ann. d. Phys. (4), **54**, 41—60, 1917.

Berücksichtigt man bei Durchsicht der Werte von Δ in der früheren Tabelle den Einfluß, den Fehler in den Längenabmessungen und Ungenauigkeiten in den Zeichnungen auf die ermittelten Zahlen ausüben können, so ist das genäherte Bestehen der Beziehung

$$\mathfrak{B}_k = \frac{1}{2}(\mathfrak{B}_r + \overline{\mathfrak{B}})$$

oder

$$\mathfrak{J}_k = \frac{1}{2}(\mathfrak{J}_r + \overline{\mathfrak{J}})$$

genügend bemerkenswert, um die vorstehenden Mitteilungen als nicht überflüssig erscheinen zu lassen.

Die genannte Beziehung erweist sich als unzutreffend bei Eisen-Silizium-Legierungen mit merklichem *Si*-Gehalt, wie aus den Zahlen von Tafel III des kürzlich erschienenen Buches von E. Gumlich[1]) hervorgeht.

1) E. Gumlich, Leitfaden der magnetischen Messungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn. 1918.

Aachen, Juni 1918.

(Eingegangen 1. Juli 1918.)

Über die kritische Temperatur des Quecksilbers[1].

Von Julie Bender†.

Versuche, die kritische Temperatur des Quecksilbers durch Erhitzen in Quarzkapillaren festzustellen, wurden zuerst von J. Traube[2] und G. Teichner, die bis etwa 1000° kamen, dann von J. Koenigsberger[3], der bis etwa 1270°, von W. C. Menzies[4], der wohl über 1270° erhitzen konnte, angestellt. Die Verfasserin[5] hatte einige Daten schon in einer vorläufigen Mitteilung gegeben. Auch bei den im folgenden beschriebenen Versuchen wurde die kritische Temperatur noch nicht erreicht, obgleich es bei einem Versuch gelang, bis etwa 1430° C zu kommen. Doch sind die Dichten des flüssigen und gasförmigen Quecksilbers bis etwa 1400° C angenähert gemessen und dadurch die Grenzen, zwischen denen die kritische Temperatur liegen muß, genauer als bisher ermittelt worden. Das Prinzip der Messungen ist dasselbe wie früher[5]. Die Quarzkapillaren wurden von W. C. Heräus in Hanau mit reinem Quecksilber gefüllt geliefert.

§ 1. Die Bestimmung der Dampfdichte geschah in der Weise, daß die Temperatur gemessen wurde, bei der das flüssige Quecksilber soeben in den Kapillaren verschwand. Kennt man bei 0° das Verhältnis f des Volumens des flüssigen Quecksilbers zu dem der ganzen Kapillaren, so ist dadurch das Verhältnis der Dichte d bei der Temperatur t, bei der gerade alles Quecksilber verdampft ist, zu der Dichte d_0 bei 0° gegeben. Man hat die Formel $d = d_0 \cdot f$ auf $H_2O = 1$ bezogen.

Auf diese Art wurde in einer Anzahl Versuche die Dampfdichte bestimmt. Die wahren Temperaturen $t_{(korr.)}$ des Quecksilberfadens sind wegen der Ausstrahlung im Innern etwas geringer (vgl. § 3) als die außen am Quarz mit Thermoelement gemessenen.

Die Messungen hätten später noch weiter ausgeführt werden sollen. Die Abhängigkeit der Dampfdichte von der Temperatur ist mit Benutzung der von Cailletet, Colardeau u. Rivière[6] bis etwa 800° gemessenen Werte auf Fig. 1 graphisch dargestellt.

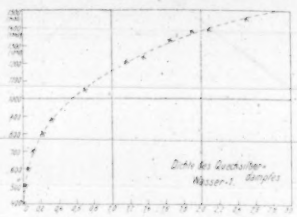


Fig. 1.

Tabelle I.

f	t in C°	d	$t_{(korr.)}$
0.05	1050	0,70	1050
0,09	1210	1,15	1210
0.10	1230	1,35	1230
0.12	1330	1,05	1295
0,14	1380	1.90	1330
0,18	1450	2,50	1380

Die kritische Temperatur wurde bei diesen Versuchen noch nicht erreicht, sie liegt jedenfalls über 1370° C. Die von J. J. van Laar[1] angestellte Berechnung über die kritische Temperatur ($T_k = 1172$) stimmt also nicht zu unseren Beobachtungen; vielleicht weil Hg von etwa 1000° ab noch stärker als bimolekular aggregiert ist. Auch der kritische Druck muß nach unseren Schätzungen erheblich größer sein als 180° Atm.; denn es wurde die Dampfdichte von 2,50 erreicht, was in erster Annäherung einem Druck von über 200 Atm. entspricht.

§ 2. Die Dichtebestimmung des flüssigen Hg geschah folgendermaßen: Wenn man das Volumen der Kapillaren als konstant voraussetzt, so verhalten sich die Volumina des flüssigen Hg bei verschiedenen Temperaturen umgekehrt wie die Dichten.

Die Volumenvergrößerungen des flüssigen Quecksilbers während des Erhitzens wurden durch die Veränderung der Länge des Quecksilberfadens in der vorher sorgfältig auskalibrierten Röhre bestimmt. Die Längeänderungen des Quecksilberfadens in der Kapillare wurden mit Mikroskop gemessen, das ein Kühlobjektiv von etwa 2,5 cm Brennweite hatte. Zwischen Kapillaren und Objektiv stand ein Schirm aus Quarzglas. In seiner Mitte war eine kleine Öffnung. An dieser wurde ein plan geschliffenes Blättchen aus reinstem Quarz zwischen drei dem Quarzglasschirm aufgeschmolzenen Haken eingeschoben. Die Verlängerung des Quecksilber-

1) Die Verfasserin ist im Febr. 1917 gestorben. Ihrem Wunsch entsprechend sind die sorgfältigen, aber nicht ganz abgeschlossenen Beobachtungen hier kurz zusammengestellt und erörtert. (J. Koenigsberger.)

2) J. Traube u. G. Teichner, Ann. d. Phys. **13**, 620, 1904.

3) J. Koenigsberger, Chem. Ztg. **36**, 1321, 1912.

4) W. C. Menzies, Amer. Chem. Soc. **35**, 1065, 1913.

5) J. Bender, diese Zeitschr. **16**, 246, 1915.

6) Cailletet, Colardeau et Riviere, C. R. **130**, 1585, 1900.

1) J. J. van Laar, Versl. K. Ak. van Wetensch. **25**, 1498, 1917 (Beibl. **42**, 42, 1918).

fadens wurde mit Okularmikrometer [1]) oder durch Verschieben des Mikroskops an einer Teilung mit Nonius, die 0,02 mm angab, abgelesen.

Die mit Quecksilber gefüllten Kapillaren aus Quarzglas wurden in einen Schutzmantel, eine unten geschlossene, sehr gut zylindrische Röhre ebenfalls aus ganz reinem Quarzglas, hineingehängt. Die Schutzröhre wurde dann oben mit feinem Asbest gegen Luftströmung abgeschlossen. Erhitzt wurde durch zwei nach Abstand und Richtungswinkel genau regulierbare Gebläse, in die Leuchtgas, Druckluft und Sauerstoff geleitet werden konnte. Die Regulierung des Sauerstoffs erfolgte durch ein besonders feines doppeltes Reduzierventil. Diese ganze Apparatur wurde im Abzug vor Luftströmungen geschützt. Hierdurch war es möglich, die Temperatur auf etwa 10° konstant zu halten. Die Messung der Temperatur wurde mit sehr dünnem Thermoelement nach Le Chatelier (Drahtdurchmesser von etwa 0,2 und 0,1 mm) nach der Kompensationsmethode ausgeführt. Die Lötstelle des Thermoelements lag in Schlinge um die Kapillaren im Schutzrohr, etwas unterhalb der Stelle, wo der Quecksilberfaden aufhörte. Nur ein Teil der nach Mitteilung der Firma Heräus recht schwierig anzufertigenden, mit Quecksilber gefüllten Quarzglasröhren erwies sich brauchbar. Wie zu erwarten, waren die Kapillaren mit kleinstem inneren Durchmesser die besten. Beleuchtet wurde bis 900° durch Auerbrenner mit geeignetem Papierschirm; oberhalb 900° genügte das Selbstleuchten des Quecksilberfadens. Das Kalibrieren der Kapillaren geschah sowohl in der bekannten Weise durch Verschieben des Fadens wie durch direkte Messung unter dem Mikroskop. In letzterem Fall wurde, um die Elliptizität zu eliminieren, jeweils in vier Azimuten (0°, 45°, 90°, 135°) abgelesen, und das Mittel aus den vier Werten genommen. Dann wurde d^2 berechnet, auf mm Papier aufgetragen und graphisch das Volumen für jede Länge des Quecksilberfadens ermittelt.

Je höher die Temperatur und je länger die Dauer der Erhitzung, um so mehr machte sich das Erweichen des Quarzglases unter dem Einfluß der hohen Dampfdrucke, und als Folge davon eine dauernde Volumvergrößerung geltend. Nur solche Versuche waren brauchbar, bei denen das Volumen der Kapillaren vor und nach der Erhitzung auf etwa ± 5 Proz. dasselbe war, was durch Längenmessungen des Quecksilberfadens in der auskalibrierten (vgl. unten) Kapillare festgestellt wurde, nachdem sich das Rohr wieder abgekühlt hatte.

Eine temporäre, rein elastische Ausweitung des Volumens war mit den vorhandenen Mitteln nicht nachweisbar. Der scheinbare, durch die Quarzröhre vergrößerte Durchmesser konnte mit dem oben erwähnten Kühlobjektiv und einem Okular, das aus einem etwa 20 mal vergrößernden Mikroskop bestand, auf etwa ± 5 Proz., das Volumen also auf ± 10 Proz. genau gemessen werden. Der innere wahre Durchmesser der Kapillaren war klein, etwa 0,05—0,17 mm, der äußere verhältnismäßig groß 5—10 mm. Wenn Temperatur und Längenveränderung rasch abgelesen wurden, was etwa 30—50 Sekunden erforderte, so konnte man bis 1100° erhitzen, ohne daß sich während des Erhitzens durch direkte mikroskopische Messungen des Durchmessers oder nach dem Abkühlen durch Längenbestimmung des Quecksilberfadens eine Erweiterung des Volumens von mehr als 10 Proz. feststellen ließ. Die Länge der Kapillaren blieb stets konstant.

Bis 1200° war dagegen nur etwa die Hälfte der Kapillaren verwendbar. Als unbrauchbar wurden alle Kapillaren betrachtet, bei denen die Vergrößerung des Volumens nach der Erhitzung über 15 Proz. betrug.

Es seien einige Beispiele gegeben: n gibt an, welcher Teil des Volumens V_0 am Anfang, n', welcher am Ende des Versuchs von Hg ausgefüllt war. Der Durchmesser in der Mitte der Kapillare $= d$ ist in Skalenteilen des Okularmikroskops gemessen. t = Temperatur in C.

Tabelle II.

XII. $n = 0{,}38$		XIII. $n = 0{,}55$		XV. $n = 0{,}42$	
t	d	t	d	t	d
20°	29,0	20°	25,0	20°	11,0
905	29,5	1015	25,0	1020	11,0
1010	29,0	1120	25,5	1115	11,0
1095	29,0	1210	27,0—30,5	1090	11,5
1215	29,5	Heizung abgestellt		1355	11,0
1200	29,0	$n' = 0{,}30$		1315	11,0
1305	20,5			1345	11,0
1350	30,0 und geht bis 38, worauf Heizung abgestellt wird.			1405	11,0
				$n' = 0{,}42$	
$n' = 0{,}22$					

Also sind bei XII die gleichzeitig angestellten Längenmessungen bis etwa 1300°, bei XIII bis etwa 1120°, bei XV bis 1400° verwertbar.

Nur wenige Kapillaren, wie XV, konnten bis etwa 1300°, und nur in einem Fall bis 1500° erhitzt werden, ohne daß sich die Kapillare rasch erweiterte. Es gelang hierbei festzustellen, daß auch bei 1500° (unkorrig.) noch flüs-

1) Als Okular wurde ein stark vergrößerndes Huygens-Okular oder ein schwaches Mikroskop verwendet.

siges Quecksilber vorhanden war, das hell leuchtet, während der Dampfraum trotz der hohen Dampfdichte dunkel bleibt. Die kritische Temperatur[1]) liegt also über 1500° unkorr. bzw. 1430° korrig.; vgl. § 3, Tab. V.

Als eine Korrektion kommt in Betracht, daß ein Teil des Quecksilbers verdampft. Da aber die Dampfdichte in anderen Versuchen (vgl. Tab. I) direkt gemessen worden war, so läßt sich diese Korrektion sicher anbringen, zumal man für die Dichtebestimmung des flüssigen Quecksilbers bis 1000° Röhren nimmt, deren Volumen zum großen Teil von flüssigem Quecksilber erfüllt ist.

Wenn das Volumen der Kapillaren = 1 gesetzt wird, f_t der von dem flüssigen Hg bei t^0 erfüllte Bruchteil, s_1 seine ohne Korrektion angenähert ermittelte Dichte, d_t die zugehörige Dampfdichte ist, so ist als Korrektion zu addieren

$$(\Delta f_t)_1 = \frac{(1 - f_t)}{s_1} d_t, \text{ worin } s_1 = \frac{s_0 \cdot f_0}{f_t}.$$

s_0 ist die Dichte bei $0^0 = 13{,}6$. Demnach ist die Dichte des flüssigen Hg in zweiter Annäherung bei t^0

$$s_2 = \frac{s_0 \cdot f_0}{f_t + (\Delta f_t)_1}.$$

In der nächsten stets genügenden Annäherung gilt:

$$(\Delta f_t)_2 = \frac{(1 - f_t)\, d_t}{s_2},$$

also

$$s_3 = \frac{s_0 f_0}{f_t + (\Delta f_t)_2}.$$

Wir geben hier einige Beispiele

Tabelle III.

	t in °C	f_0	f_t	$(\Delta f_t)_1$	$(\Delta f_t)_2$	d_1	d_2	d_3
Vers. II.	500	0,39	0,43	0,00	—	12,5		
	600	0,39	0,44	0,00	—	12,15		
	800	0,39	0,40	0,00	—	11,5		
	1000	0,39	0,48	0,026	0,027	11,05	10,5	10,4
	1100	0,39	0,48	0,034	0,0	11,05	10,4	10,2
Vers. XI.	1130	0,315	0,40	0,050	0,057	10,7	9,5	9,40
	1200	0,315	0,40	0,050	0,070	10,7	9,3	9,1
	1300	0,315	0,40	0,09	0,11	10,7	8,75	8,4

Aus derart berechneten Versuchsreihen ergibt sich die folgende Tabelle:

1) Trägt man die Dichten des flüssigen und gasförmigen Quecksilbers graphisch auf, so kann man sie angenähert durch je ein Stück einer Parabel darstellen und findet durch Extrapolation, daß die kritische Temperatur des Quecksilbers zwischen 1500° und 1600° C. die kritische Dichte zwischen 4 und 5 liegen müßten.

Tabelle IV.

t in °C	Dichten in verschiedenen Versuchsreihen				Beobachtete Mittelwerte der Dichten		Dichte n. Gesetz d. Mittellinie berechn.
500	12,5						12,38
600	12,15						12,10
800	11,50		11,80	11,5	11,6		11,40
900			11,10	11,2	11,15		11,11
1000	10,4	11,0	10,0	10,7	10,55		10,67
1100	10,2	9,95	9,65	10,2	10,0		10,18
1130	9,40						
1200		8,55		9,1	8,85		9,57
1300		8,10		8,4	8,25		8,90
(1270)							
1370		7,8					
(1320)							

(Die eingeklammerten Zahlen sind die nach § 3 korrigierten Temperaturen, statt 1300°: 1270° und statt 1370°: 1320°.)

Die Dichte des flüssigen Hg wurde nach dem Gesetz der Mittellinie von Cailletet und Matthias berechnet, indem die Mittellinie aus den Messungen der Dichten des flüssigen und dampfförmigen Quecksilbers zwischen 0° und 360° (vgl. Tabellen von Landolt und Börnstein), die da sehr genau eine gerade Linie ergeben, über 360° hinaus verlängert wurde. Die zur Berechnung notwendigen Dichten des dampfförmigen Hg wurden der Tabelle I entnommen. Ob die bei höherer Temperatur auftretende und zunehmende Differenz zwischen beobachteten und aus dem Gesetz der Mittellinie berechneten Werten auf systematische Fehler in der Dichtebestimmung oder auf Polymerisation des Quecksilbers zurückzuführen ist, bleibe dahingestellt. Die Korrektionen der Temperaturmessung (vgl. § 3) werden erst bei etwa 1300° erheblicher. Sie sind übrigens für das Gesetz der geraden Mittellinie unwesentlich.

§ 3. Lichtemission des flüssigen und dampfförmigen Hg. In dem Dampf ist noch bei etwa 1270°, also bei einer Dichte von etwa 2,0, ein Leuchten nicht wahrzunehmen, während die Flüssigkeit gleichzeitig ein blendend weißes Licht emittiert, dessen Stärke, wie S. 413 gezeigt, etwa der des schwarzen Körpers bei 1100° entspricht. Der Dampf ist auch bis etwa 1300° im sichtbaren Gebiet völlig durchsichtig, sein metallisches und selektives Absorptionsvermögen für weißes Licht ist in den benutzten Schichtdicken stets $< 0{,}001$, also auch sein Leitvermögen sehr klein. — Über 1270° leuchtet oder erscheint der Dampfraum, wie schon a. a. O. beschrieben, in ganz schwach blauem Licht, falls die Röhre bei gewöhnlicher Temperatur zu mehr als $^1/_3$ mit flüssigem Hg gefüllt war. Eine vorläufige, subjektiv spektrale Untersuchung führte zu keinem Ziel, da die Helligkeit zu schwach

war. Die Lichtemission des flüssigen *Hg* wurde mit Wanner Pyrometer für $\lambda = 656\ \mu\mu$ mit der des schwarzen Körpers verglichen. Man erhielt also die scheinbare Temperatur des Quecksilberfadens aus der Lichtemission für den schwarzen Körper berechnet. Die Außentemperatur der Kapillare wurde mit Thermoelement gemessen. Die Differenzen sind in der folgenden Tabelle angegeben. Die Mittelwerte sind unter Berücksichtigung der besten Messungen genommen.

Unter *D* ist dann die Differenz der mit Thermoelement gemessenen Temperatur weniger der aus der Emission unter Berücksichtigung der Reflexionsverluste unter den im folgenden angegebenen Voraussetzungen ermittelten Temperatur gegeben.

Tabelle V.

f bedeutet den mit flüssigem *Hg* gefüllten Raum in Bruchteilen des Ganzen. *d* ist der Durchmesser, lichte Weite, der Quarzkapillaren in Skalenteilen ausgedrückt

T des Thermoelements	*f* = 0,5 *d* = 5 Skt.	*f* = 0,5 *d* = 30 Skt.	*f* = 0,5 *d* = 35 Skt.	*f* = 0,5 *d* = 10 Skt.	*f* = 0,5 *d* = 10 Skt.	*f* = 0,4 *d* = 5 Skt.	Mittel	D	
900	90	60	80	—	130	130	90		
1000	—	110	110	120	130	150	120		
1100	100	130	115	140	150	160	130		
1200	170	120	180	170	160	180	160	10	
1300	210	140	230	250	210	220	200	30	
1330	240	175	—	—	—	250	215	37	
1380	250	—	240	200	—	—	240	50	

Um die beobachteten Zahlen theoretisch verwenden zu können, mußte zunächst die Reduktion auf eine ebene freie Fläche von *Hg* vorgenommen werden, und demgemäß erstens der Einfluß der Krümmung des *Hg*-Fadens, zweitens die Intensitätsverluste und Fehler, die sein optisches Bild des kleinen Durchmessers wegen bietet, und drittens der Intensitätsverlust durch die übrigens geringe Reflexion an den Wänden der Quarzkapillare eliminiert werden. Schließlich muß dann viertens die so ermittelte Emission einer Quecksilberoberfläche auf die des schwarzen Körpers gleicher Temperatur reduziert werden. Wie man leicht sieht, sind 1 und 2 von der Temperatur unabhängig, auch für 3 trifft das zu, da sich der Brechungsexponent mit der Temperatur so wenig ändert, daß dies für unsere Versuche ohne Bedeutung bleibt. Deshalb müßte die Emission des *Hg*-Fadens in der Quarzkapillare immer denselben Bruchteil der Emission des schwarzen Körpers betragen.

Die Reduktion für (1) (2) (3) wurde empirisch vorgenommen. Für rotes Licht sind, wie Holborn und Henning feststellten, die optischen Konstanten des Platins von der Temperatur unabhängig[1]). Platin verhält sich hinsichtlich der Emission als grauer Körper. Die ausgezogenen Kurven sind für eine ebene Fläche von *Hg* und *Pt* berechnet. Ein Platindraht von gleicher Dicke wie der Quecksilberfaden wurde in eine Quarzkapillare von den sonst benutzten Dimensionen eingeschlossen und seine Emission mit der des schwarzen Körpers verglichen. Die Reduktion der Emission des Platindrahtes in der Quarzkapillare auf den Quecksilberfaden kann rechnerisch, wenn auch nicht ganz genau, mit dem aus dem Reflexionsvermögen bei 0° berechneten Verhältnis der Emission von Quecksilber und Platin unter Berücksichtigung des verminderten Reflexionsverlustes am Quarz ausgeführt werden. Das Endresultat ist die berechnete (gestrichelte) Kurve für die Emission des *Hg* in der Quarzkapillare, die gelten würde,

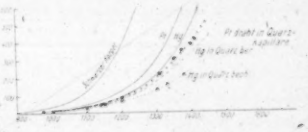


Fig. 2.

wenn die optischen Konstanten von 0° ab unverändert bleiben und wenn die mit Thermoelement außen an der Quarzkapillare gemessene Temperatur die des Quecksilberfadens wäre. Vergleicht man die beobachtete (punktierte) mit der berechneten Kurve, so sieht man, daß die beobachtete Emission mit steigender Temperatur gegen die berechnete immer stärker zurückbleibt. Wäre stetige Abnahme der selektiven oder metallischen Absorption des *Hg* die Ursache, so müßte zuerst eine Abnahme der Reflexion und damit eine Zunahme der Emission verglichen mit der des schwarzen Körpers eintreten. Erst später, wenn die Schicht merklich durchsichtig würde, käme die Abnahme der Emission und diese müßte von der Schichtdicke abhängig sein, also für $d = 5$ Skalenteilen bei tieferer Temperatur eintreten, als bei dem größeren Durchmesser von 35 Skalenteilen. Beides trifft nicht zu. Die anderen Möglichkeiten, eine dauernde Zunahme der Absorption (oder eine entsprechende Änderung des Brechungsindex), die eine Zunahme des Reflexionsvermögens und damit eine Abnahme der Emission bewirken würden, sind wegen der starken Dichteabnahme ausgeschlossen. Also kann die relative Abnahme der Emission mit steigen-

1) W. Holborn u. F. Henning, Sitzber. Berl. Akad. 1905, S. 311.

der Temperatur keine optischen Ursachen haben. Viel mehr wächst mit steigender Temperatur die innen vom Quecksilber ausgestrahlte Wärmemenge rascher als die von außen durch das Quarzglas nach dem Quecksilber hingeleitete. Das Wärmeleitungsvermögen des Quarzglases bei dieser Temperatur ist nicht untersucht, aber aus der Messung an Gläsern bei tieferer Temperatur läßt sich ersehen, daß es nur wenig von der Temperatur abhängt, wahrscheinlich langsamer als prop. T steigt, keinesfalls aber prop. T^4 wächst.

Daher muß mit steigender Temperatur die Differenz zwischen der Temperatur des stark emittierenden Hg und der höheren Außentemperatur des schwächer emittierenden, weil teilweise durchlässigen Quarzglases wachsen. Eine genaue Berechnung wäre nur möglich, wenn die Absorption des Quarzglases im ganzen Ultrarot bekannt wäre. Doch kann man sich qualitativ eine Vorstellung von dem Gang der Temperaturdifferenz aus der allgemeinen Beziehung für den stationären Zustand verschaffen:

$$k'(T - T_2) = \sigma' T_2^4 - \sigma'' T^4.$$

Hierin ist k' eine Größe, die sich multiplikativ aus der Wärmeleitfähigkeit des Quarzglases und aus einem von der geometrischen Form und den Dimensionen des Quarzhohlzylinders abhängigen, von der Temperatur nahezu unabhängigen Faktor zusammensetzt. T ist die Temperatur der Außenwand der Quarzkapillare, T_2 die der Innenwand des Quarzes und des Quecksilbers. σ' hängt von der Strahlungskonstante σ und dem Reflexionsvermögen des Quecksilbers ab und ist auf dessen Zylinderfläche bezogen.

σ'' ist Funktion der Absorption des Quarzglases und von σ. T ist die Mitteltemperatur der Quarzmasse. σ' ist bei 1200° mindestens 5 mal so groß als σ''. Sowohl σ' wie namentlich σ'' sind schon wegen der Verschiebung des Strahlenmaximums nach kleineren Wellenlängen mit steigender Temparatur veränderlich. σ' wird etwas größer, σ'' erheblich kleiner. Aus der Formel ist zu ersehen, daß in erster Annäherung:

$$T - T_2 = \frac{\sigma' - \sigma''}{k'} T_2^4,$$

daß also die Differenz zwischen Außen- und Innentemperatur mit steigender Temperatur rasch zunimmt. Daher ist das hier eingeschlagene Verfahren zu einer genauen Messung der Emission des Quecksilbers bei Temperaturen über 1200° nicht verwendbar, solange nicht auf anderem Wege direkt die Temperatur des Quecksilbers gemessen werden kann. Hier ist also der Fall beobachtet, daß ein absorbierender Körper, der allseitig von einer teilweise strahlungsdurchlässigen Hülle umschlossen ist, infolge Ausstrahlung in den Außenraum eine merklich geringere Temperatur als die Hülle besitzt.

Bis 1200° stimmen beobachtete und berechnete Emission noch innerhalb einer Fehlergrenze von + 15 Proz. überein. Die optischen Konstanten für Rot sind also bis 1200° nicht wesentlich anders als bei 0°. Auch bei 1380° (korrig. etwa 1330°[1]) ist die Emission keinesfalls sehr verschieden von der berechneten. Die Absorption des flüssigen Quecksilbers bei 1330° ist daher jedenfalls von gleicher Größenordnung wie bei 0°. Sie ist metallischer Natur; denn der Dampf, dessen Dichte bei 1330° etwa $^1/_3$ der Flüssigkeitsdichte beträgt, zeigt keinerlei selektive Absorption. Die selektive Absorption ist aber eine molekulare (bzw. atomare) Eigenschaft, die durch den Aggregatzustand meist wenig geändert wird. (Ann. d. Phys. **37**, 601, 1912.) Also muß auch in der Flüssigkeit bei 1330° das nächste Absorptionsgebiet im Ultraviolett liegen; es kann nur der Brechungsindex, nicht die Absorption im Rot von der selektiven Absorption abhängen. Da aber das flüssige Hg bei 1330° noch das Rot stark absorbiert, muß ein elektrisches Leitvermögen derselben Größenordnung wie bei 0° vorhanden sein. Das beweist aber, daß eine Dichteverminderung auf etwa die Hälfte die Nahewirkung (P. Lenard) der Atome auf die Elektronen noch nicht aufhebt. Hingegen ist der Dampf auch bei 1400° trotz seiner relativ hohen Dichte (etwa 3) durchsichtig, der Abstand der Quecksilberatome ist da noch groß genug, um zu bewirken, daß sich das Elektron von dem Atom nicht loslösen und daher auch die Elektrizitätsleitung nicht übernehmen kann.

1) Der genaue Korrektionswert läßt sich nicht angeben, da die in der Tabelle berechneten Temperaturdifferenzen nur gelten, falls die optischen Konstanten des Quecksilbers im Rot von der Temperatur völlig unabhängig wären.

Freiburg i. B., Math.-physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 1. Juli 1918.)

BESPRECHUNGEN.

W. Schüle, Technische Thermodynamik. I. Band: die für den Maschinenbau wichtigsten Lehren nebst technischen Anwendungen. 3. erweiterte Auflage. gr. 8°. XII u. 553 S. mit 244 Textfiguren und 7 Tafeln. Berlin, J. Springer. 1917. Preis geb. M. 16.—

In der vorliegenden dritten Auflage, die den beiden ersten rasch folgte und für die Verbreitung und Beliebtheit des Werkes das beste Zeugnis ausstellt, hat der Verf. die neueren Forschungen eingehend berücksichtigt und in den älteren Text geschickt eingeflochten. Das Werk bietet zweifellos für Studierende des Maschinenbaues und der technischen Physik die beste Einführung in die Materie. Der Verf. trägt den Bedürfnissen der ausführenden Technik in weitestem Umfange Rechnung und stellt, trotzdem er den wissenschaftlichen Boden niemals verläßt, an seine Leser die geringsten Ansprüche.

Mit besonderer Sorgfalt behandelt der Verf. die Strömungslehre und ihre Anwendung auf die Turbinentheorie. Neu sind hier der wichtige Abschnitt über die Überschallgeschwindigkeit bei einfachen Mündungen, ein Beispiel für die graphische Düsenberechnung und der Abschnitt über die Verdichtungsströmung mit Widerständen. Diese Strömung tritt z. B. in Schleuderverdichtern und auch im Diffusor der Wasserdampfstrahl-Kältemaschinen auf. Letzterer Maschinengattung ist ebenfalls ein neu hinzugetretener Abschnitt gewidmet, der sich allerdings im wesentlichen mit der Beschreibung der Wirkungsweise begnügt; eine erschöpfende Theorie dieser Maschine besitzen wir noch nicht.

Die Abschnitte über den Luftwiderstand (Seite 363 bis 393) sowie die Energieverhältnisse der Flugmaschine (Seite 465—477) hätten meines Erachtens in einem Werk über Thermodynamik ganz unterdrückt werden können, weil sie einerseits infolge der Vernachlässigung thermischer Einflüsse zu dem übrigen Inhalt nur in sehr losem Zusammenhang stehen und sich andererseits wegen Platzmangel eine erschöpfende Darstellung verbietet.

Der Verlag hat trotz der durch den Krieg bedingten Schwierigkeiten das Werk in derselben vorzüglichen Ausstattung herausgegeben wie die älteren Auflagen. Um den Umfang des Werkes trotz zahlreicher Einschaltungen nicht merklich zu erhöhen, ist für alle Anwendungsbeispiele, die einen erheblichen Teil ausmachen, ein kleinerer Druck gewählt worden. Es ist dadurch gelungen, den Zuwachs auf einen Bogen zu beschränken. Die Figuren und Tafeln lassen an Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig.

Das Werk wird Vielen ein dauernder sicherer Berater bleiben und stets neue Freunde erwerben.

Plank.

Jos. Krauß, Grundzüge der maritimen Meteorologie und Ozeanographie. 8°. XII u. 221 S. mit 60 Textfiguren. Berlin, J. Springer. 1917. Geb. M. 5.—

Die Absicht des Verf., ein für den praktischen Seemann ohne eingehendere Studien der einschläglichen mathematischen und physikalischen Theorie brauchbares Lehr- und Nachschlagebuch in möglichst gedrängter Form zu geben, ist ihm recht gut gelungen. Dabei hat er noch besondere Rücksicht auf den Umfang der Kenntnisse genommen, wie sie die Prüfungsvorschriften für die Erwerbung der Berechtigung zu „Großer Fahrt" vorschreiben.

Im einzelnen gliedert sich das Buch in die zwei Hauptteile, die schon der Titel erkennen läßt. Im ersten Teile, der von den 220 Seiten nahezu drei Viertel einnimmt, werden nacheinander die allgemeine Beschaffenheit der Atmosphäre, Luftzusammensetzung, sodann die Wirkungen der Temperaturen, ihre Verteilung und ihr jährlicher und täglicher Gang erörtert. Hier wie auch in den folgenden Paragraphen beschreibt der Verf. in einfacher, aber sehr zweckentsprechender Form und durch Beispiele erläutert, die für den meteorologischen Beobachtungsdienst nötigen Apparate. Sodann kommen zur Sprache der Wassergehalt der Atmosphäre, die Verteilung und Menge der Niederschläge und danach werden in den §§ 5, 7 und 8 die Bewegungsverhältnisse, in § 6 die elektrischen Vorgänge erörtert. Die folgenden Paragraphen beschäftigen sich in sehr eingehender Weise mit den Winden und mit der Beschreibung der verschiedenen, häufig an lokale Bedingungen geknüpfte Arten derselben und ihren Einfluß auf die Schiffahrt.

Der erheblich kürzer gehaltene Abschnitt über Ozeanographie behandelt zunächst die Meeresräume der Erde und das Meerwasser in chemischer und physikalischer Hinsicht, die Bildung, Höhe und Gestalt der Wellen, um sich sodann den für die Schiffahrt wichtigsten Bewegungen des Wassers, wie sie durch die Winde und Strömungen hervorgebracht werden, in ausführlicher Weise zuzuwenden. Den Schluß bildet die Darstellung des Gezeitenphänomens.

Der Text wird durch viele praktische Tabellen und schematische Zeichnungen in vorzüglicher Weise ergänzt.

In fast allen Teilen des Buches sind dem überaus reichen Beobachtungsmateriale der Deutschen Seewarte entnommene Beispiele eingestreut, die dem Buche den Charakter eines aus der Praxis für die Praxis geschriebenen Werkchens verleihen.

Ambronn.

W. Schweyder, Die Bewegung der Drehachse der elastischen Erde im Erdkörper. 4°. 8 S. Sonderabdruck aus den Astronomischen Nachrichten. Kiel, Verlag der Astronomischen Nachrichten. Einzelne Hefte M. 1.—

In dem vorliegenden Sonderabdruck aus den Astronomischen Nachrichten gibt der Verfasser eine theoretische Darstellung über seine Untersuchungen, die sich auf breiter Basis mit der Frage des möglichen Nachweises einer Elastizität des festen Erdkörpers befassen. Es wird nachgewiesen, daß eine solche Elastizität vorhanden ist, und wie sie sich als Ausfluß der Anziehung von Mond und Sonne auf die „feste" Erde im Vergleich mit der flüssigen, also dem nahezu frei beweglichen Teile der Erdoberfläche gestalten muß. Die mathematischen Formen der einzelnen wirkenden Kräfte sind unter bestimmten Annahmen in großer Ausführlichkeit gegeben. Die Behandlung geht von der Fragestellung aus, inwieweit die Vorgänge bei der Formänderung statischer oder dynamischer Art sein können. In einer vor kurzem an dieser Stelle besprochenen Arbeit desselben Verfassers werden Untersuchungen über die Bewegung der instantanen Rotationsachse der Erde gegenüber einer mittleren Lage der Trägheitsachse auf Grund der Resultate des internatio-

nalen Breitendienstes behandelt. Diese Untersuchungen sind auch hier für die Gewinnung absoluter Zahlenwerte für die Elastizität benutzt. Die Rechnungen führen zu dem Schluß, daß die Exzentrizität der Ellipse, die der Rotationspol um den Trägheitspol der Erde beschreibt, durch das Vorhandensein einer Elastizität vergrößert wird. Die Amplitude der Ellipse wird aber durch die Elastizität im Verhältnis von 10 : 7 verkleinert. Die durch eine wirklich vorhandene, aber sehr geringe Elastizität bedingten Zusatzglieder zu den Ausdrücken für Präzession und Nutation, wie sie für die starre Erde durch Sonne und Mond veranlaßt werden, können bei allen astronomischen Untersuchungen unberücksichtigt bleiben.

Alle diese Ergebnisse sind unabhängig von irgend einer Annahme über den Verlauf der Dichtenschichtung in der Erde. L. Ambronn.

O. Große, 40 Jahre Fernsprecher (Stephan-Siemens-Rathenau). gr. 8. 90 S. m. 16 Abbildungen. Berlin, J. Springer. 1917. M. 3.—

Die kleine historische Abhandlung behandelt in leicht zu lesender Darstellung ein in vieler Hinsicht interessantes und lehrreiches Gebiet der technischen Entwicklungsgeschichte. Besonders werden die Verdienste des damaligen Generalpostmeisters Stephan hervorgehoben, der sofort die enorme Bedeutung des Fernsprechers erkannte und seine Einführung in Deutschland mit großer Energie betrieb. Wir haben dadurch in Deutschland sofort ein hochentwickeltes staatliches Fernsprechnetz bekommen, während in andern Ländern sich der Staat erst wesentlich später durch Ankauf in den Besitz der bestehenden privaten Anlagen hat setzen müssen. Wenn der Verf. dies mit besonderer Genugtuung hervorhebt und durch statistische Angaben belegt, daß wir in Europa bei weitem an erster Stelle stehen, hätte er vielleicht nicht unerwähnt lassen sollen, daß wir von Amerika in noch viel höherem Maße übertroffen werden, und daß auch in technischer Hinsicht Amerika führend ist. Der Wettkampf privater Gesellschaften ist ein nicht zu unterschätzender Ansporn, besonders in den Entwicklungsjahren. Auch will es mir scheinen, als ob in den letzten Jahrzehnten die Schwachstromtechnik bei uns nicht gebührend gewürdigt, und z. B. von unsern Hochschulen im allgemeinen stark vernachlässigt wird.

Barkhausen.

Tagesereignisse.

Preisausschreiben aus dem Gebiete der Physik.

Emil Cohnstaedt-Stiftung. Die Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Frankfurt a. M. stellt folgende Preisaufgabe:

„Sie wünscht eine möglichst vollständige Zusammenstellung und Kritik der Literatur über Gashäute an der Oberfläche fester Körper".

Der ausgesetzte Preis beträgt 1000 Mark. Die Bewerbungsschreiben sind bis zum 30. Juni 1920 bei der Dekanatskanzlei der Universität einzuliefern. Die Verkündigung des Urteils erfolgt bei Gelegenheit des Rektoratswechsels desselben Jahres. Die Fakultät ist nicht verpflichtet, Arbeiten nachzuprüfen, die nicht in einem Institut der Universität Frankfurt entstanden sind. Interessenten erhalten die näheren Bestimmungen in der Dekanatskanzlei.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Zürich Dr. K. W. Meißner und Dr. F. Tank für Physik.

Ernannt: An der Technischen Hochschule in Stuttgart der a. o. Professor Dr. G. Grube daselbst zum o. Professor für physikalische und Elektrochemie, an der Universität Greifswald der Privatdozent an der Universität Berlin Dr. Rudolf Seeliger zum a. o. Professor der Physik, an der Bergakademie Freiberg i. S. der Dozent an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Paul Wandhoff als ord. Professor für Markscheidekunst und Geodäsie, der Ingenieur Dr.-Ing. Paul Müller in Charlottenburg zum ord. Professor für Elektromaschinenbau an der Technischen Hochschule Braunschweig, der Assistent am Geodätischen Institut der Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin Regierungslandmesser Wilhelm Lührs zum ord. Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule Braunschweig.

Ehrungen: Zum korrespondierenden Mitglied der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen der Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Fritz Haber von der Universität Berlin.

Gestorben: Der Privatdozent der Chemie an der Universität Heidelberg Dr. Ernst Schrader, der frühere Professor der Elektrotechnik an der Columbia-Universität New York, zuletzt Direktor der Technischen Staatslehranstalten in Hamburg Professor Hans Zopke.

Angebote.

Physiker oder Physikerin

für unser physikalisches Laboratorium gesucht. Ausführliche Bewerbungsschreiben an

Siemens & Halske A.-G., Glühlampenwerk, Charlottenburg, Helmholtzstraße 4—8.

Physiker oder Dipl.-Ingenieur

gesucht

für Arbeiten auf dem Gebiete der

Gasentladungen.

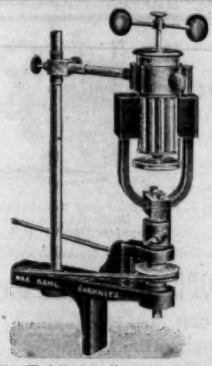
Bewerbungen erbeten an

Siemens & Halske A.-G.
Wernerwerk, Abt. M.
Siemensstadt bei Berlin.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 1600000.



32 065. Modell eines Kurzschlussankers nach Friedr. C. G. Müller, für die Schwungmaschine.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

Moderne, neue Staaten benötigen solche modernen, aber altberühmten Instrumente wie Gáti's Barretter-Meßsatz in der Hochfrequenztechnik und in der Telephonie. Preis Rubel 250.— Béla Gáti, Budapest, IX. Gyáli-ut 22.

Richard Müller-Uri, Braunschweig, Schleinitzstr. 19

Physikalische, chemische und meteorologische Unterrichts-Apparate und -Utensilien. — Glastechnische Präzisionsarbeiten.

Neuheiten: **Coulombmeter** nach Stephan D.R.G.M. — Righis **Röhren für magnetische Strahlen** mit Vakuum-Regulierung D.R.G.M. — **Quecksilber-Schnellpumpe.** — **Präzisions-Vakuometer** D.R.G.M. — **Pizzarello-Apparat.** — **Apparate für flüssige Luft.** — **Verflüssigte Gase in Röhren.** — **Projektions- und Extrem-Thermometer.** — **Elektroskope** und **Trockensäulen.** — **Vakuumröhren** nach Braun, Crookes, Geißler, Puluj, Lecher, Röntgen, Wehnelt. — **Leuchtschirme.** — **Normal-Geißlerröhren-Serie** „Kompendium". — **Original-Vakuumskalen** nach Croß.

Verlag von S. HIRZEL in Leipzig

Soeben erscheint:

P. Lenard, Geheimer Rat, ord. Professor der Physik an der Universität Heidelberg.
Über Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation. M. —.75

Hermann Th. Simon, Geh. Regierungsrat, o. ö. Professor der Physik und angewandten Elektrizität an der Universität Göttingen.
Leben und Wissenschaft, Wissenschaft und Leben. Rektoratsrede zur Jahresfeier der Georgia Augusta am 26. Juni 1918. M. 1.50

(Die Preise sind exkl. 30% Teuerungszuschlag.)

Inhaltsverzeichnis:

	Seite
Bunsengesellschaft. Hauptversammlung der Deutschen — für angewandte physikalische Chemie vom 8.—10. April 1918 in Berlin, v. A. Coehn	429
Coehn, A., Hauptversammlung der Deutschen Bunsengesellschaft für angewandte physikalische Chemie vom 8.—10. April 1918 in Berlin	429
Formatsystem: Das metrische —, v. W. Porstmann	417
Fürth, R., Statistik und Wahrscheinlichkeitsnachwirkung	421
Gripenberg, W. S., Einwirkung mechanischer Bearbeitung auf die Oberflächenschichten metallischen Selens	429
Korn, A., Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes. X.	417
Metallisches Selen: Einwirkung mechanischer Bearbeitung auf die Oberflächenschichten —, v. W. S. Gripenberg	429
Metrisches Formatsystem: Das —, v. W. Porstmann	417
Porstmann, W., Das metrische Formatsystem	417
Selen: Einwirkung mechanischer Bearbeitung auf die Oberflächenschichten metallischen —, v. W. S. Gripenberg	429
Statistik und Wahrscheinlichkeitsnachwirkung, v. R. Fürth	421
Wahrscheinlichkeitsnachwirkung: Statistik und —, v. R. Fürth	421

= Studentin der Physik =

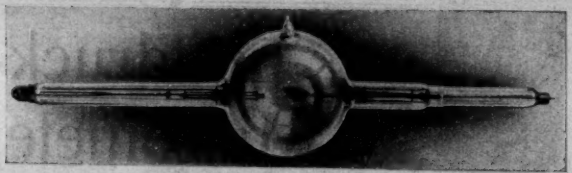
für Laboratoriumsarbeiten möglichst sofort gesucht. Schriftl. Bewerbungen mit Angabe der Gehaltsansprüche an das Sekretariat der

Optischen Anstalt C. P. Goerz Aktiengesellschaft,

Berlin-Friedenau, Rheinstraße 45/46.

Siemens & Halske A.-G.

Wernerwerk — Siemensstadt bei Berlin



Siemens-Glühkathodenröhren

mit massiver Wolfram-Antikathode können **stundenlang** mit einer **Betriebsspannung** von **130 Kilo-Volt,** effektiv gemessen bei **4 Milliampere Belastung,** betrieben werden.
Die Röhren sind für physikalische Untersuchungen und Demonstrationen wegen ihrer **Konstanz** gut geeignet. Die Kühlung der Antikathode erfolgt nur durch Wärmestrahlung.

Siemens-Spezial-Röntgenapparate zum Betriebe der Siemens-Glühkathodenröhren mit **Hochspannungstransformatoren** und **leistungsfähigen Induktoren** für **Dauerbetrieb.** Bei Transformatorenbetrieb ist die Regulierung von **Strahlenhärte** und **Röhrenstrom unabhängig.**

Literatur: Berliner klinische Wochenschrift 1916, Nr. 12 u. 13.

Vorführungen in unserem Ausstellungsraum:
Berlin NW. 6, Luisenstraße 58—59, Langenbeck-Virchow-Haus.